Derivative. Geometrical and mechanical meaning of derivative

Derivative. Argument and function increments. Differentiable function.
Geometrical meaning of derivative. Slope of a tangent. Tangent equation.
Mechanical meaning of derivative. Instantaneous velocity. Acceleration.
Differential of a function. Properties of derivatives and differentials.
Derivative of a composite function.

Derivative. Consider a function $y = f(x)$ at two points: x_0 and $x_0 + \Delta x$: $f(x_0)$ and $f(x_0 + \Delta x)$. Here Δx means some small change of an argument, called an *argument increment*, correspondingly a difference between the two values of a function: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ is called a *function increment*. *Derivative* of a function $y = f(x)$ at a point x_0 is the limit:

زيادة الدالة

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

If this limit exists, then a function $f(x)$ is a *differentiable* function at a point x_0. Derivative of a function $f(x)$ is marked as:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Geometrical meaning of derivative. Consider a graph of a function $y = f(x)$:

correspondingly
Graph
secant

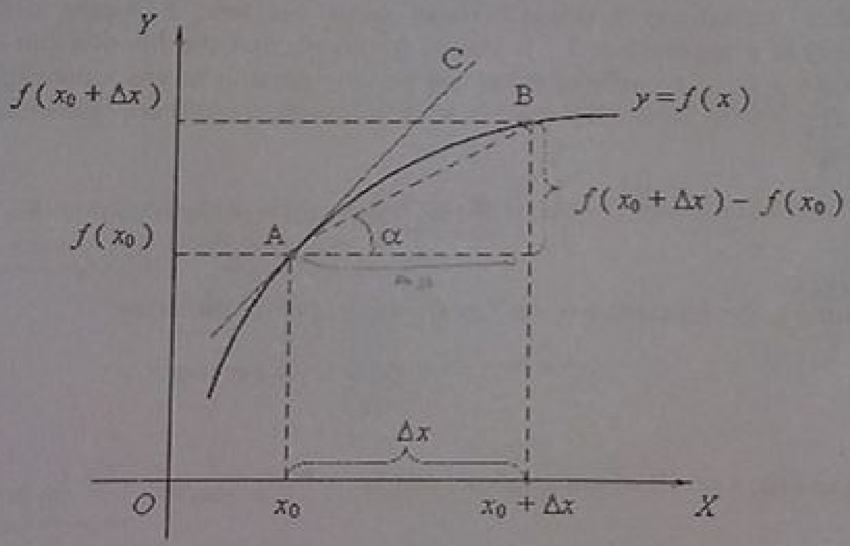

Fig. 1

From Fig.1 we see, that for any two points A and B of the function graph:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan\alpha,$$

where α- a slope angle of the secant AB.

القاطع

زاوية الميل

الخط الذي يقطع منحنى

Quotient
secant
fix
towards

So, the difference quotient is equal to a secant slope. If to fix the point A and to move the point B towards A, then Δx will unboundedly decrease and approach 0, and the secant AB will approach the tangent AC. Hence, a limit of the difference quotient is equal to a slope of a tangent at point A. Hence it follows: *a derivative of a function at a point is a slope of a tangent of this function graph at this point.*

Tangent equation. Now we'll derive an equation of a tangent of a function graph at a point A $(x_0, f(x_0))$. In general case an equation of a straight line with a slope $f'(x_0)$ has the shape:

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot x + b.}$$

To find b we'll use the fact, that a tangent line goes through a point A :

$$\boxed{f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b,}$$

hence, $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, and substituting this expression instead of b, we'll receive the equation of a tangent:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Mechanical meaning of derivative. Consider the simplest case: a movement of a material point along a coordinate line, moreover, the motion law is given, i.e. a coordinate x of this moving point is the known function $x(t)$ of time t. During the time interval from t_0 till $t_0 + \Delta t$ the point displacement is equal to: $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta x$, and its *average velocity* is: $v_a = \Delta x / \Delta t$. As $\Delta t \to 0$, then an average velocity value approaches the certain value, which is called an *instantaneous velocity* $v(t_0)$ of a material point in the moment t_0. But according to the derivative definition we have:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0).}$$

hence, $v(t_0) = x'(t_0)$, i.e. *a derivative of a coordinate with respect to time is a velocity.* This is a *mechanical meaning of a derivative.* Analogously to this, an *acceleration is a derivative of a velocity with respect to time:* $a = v'(t)$.

Differential and its relation with derivative

Differential of a function is a product of a derivative $f'(x_0)$ and an increment of argument Δx:

$$\boxed{df = f'(x_0) \cdot \Delta x.}$$

Basic properties of derivatives and differentials

If $u(x) = \text{constant}$, then $u'(x) = 0$, $du = 0$.

If $u(x)$ and $v(x)$ are differentiable functions at a point x_0, then:

$$\begin{cases} (cu)' = cu',\ d(cu) = c\,du,\ (c = \text{constant}); \\ (u \pm v)' = u' \pm v',\ d(u \pm v) = du \pm dv; \\ (uv)' = u'v + uv',\ d(uv) = v\,du + u\,dv; \end{cases}$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad d\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{u\,dv - v\,du}{v^2}, \; (v(x_0) \neq 0).$$

Derivative of a composite function. Consider a *composite* function, argument of which is also a function: $f(x) = g(f(x))$. If a function f has a derivative at a point x_0, and a function g has a derivative at a point $f(x_0)$, then a composite function h has also a derivative at a point x_0, calculated by the formula:

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Example 1 Find the derivative of the following function using the definition of the derivative.

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 35$$

Solution

So, all we really need to do is to plug this function into the definition of the derivative, and do some algebra.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 16(x+h) + 35 - (2x^2 - 16x + 35)}{h}$$

Be careful and make sure that you properly deal with parenthesis when doing the subtracting.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 16x - 16h + 35 - 2x^2 + 16x - 35}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 16h}{h}$$

Notice that every term in the numerator that didn't have an h in it cancelled out and we can now factor an h out of the numerator which will cancel against the h in the denominator. After that we can compute the limit.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h - 16)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4x + 2h - 16$$

$$= 4x - 16$$

So, the derivative is $f'(x) = 4x - 16$

Scanned by CamScanner

الاشتقاق. المعنى الهندسي والميكانيكي للاشتقاق.

تغير (زيادة) المتحول أو الدالة. قابلية تفاضل دالة.

المعنى الهندسي للاشتقاق. ميل المماس. معادلة المماس

" الميكانيكي " . السرعة اللحظية. التسارع.

تفاضل الدالة. اشتقاق وتفاضل الجزئي.

اشتقاق دالة المركبة.

نعتبر الدالة $y=f(x)$ عند نقطتين x_0 و $x_0+\Delta x$ حيث $f(x_0)$ و $f(x_0+\Delta x)$. هنا Δx يعني تغير صغير لمتحول ما يدعى بتغير (زيادة) المتحول و بالمقابل الاختلاف بين قيمتي الدالة $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ يدعى بتغير (زيادة) دالة. مشتق دالة $y=f(x)$ عند نقطة x_0 هو نهاية.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ دالة $f(x)$

إذا كانت نهاية موجودة عندها تكون الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة x_0، نرمز لمشتق الدالة $f(x)$:

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)=\frac{d(f(x))}{d(x)}\Big|_{x=x_0}$$

المعنى الهندسي للاشتقاق: يعني رسم بياني لدالة $y=f(x)$.

من Fig 1 نرى من أجل نقطتين A و B من مخطط دالة

$$\underline{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}=\tan\alpha$$

حيث α هي ميل زاوية القاطع AB.

لذا فإن حاصل القسمة يساوي ميل القاطع. إذا ثبتنا نقطة A وحركنا نقطة B على مسار A عندها Δx متناقص بشكل غير محدود يميل له

والقاطع AB يميل إلى المماس AC . بالتالي نهاية معدل التغير تساوي ظل الزاوية عند نقطة A .

بالتالي مشتق الدالة عند نقطة هو ميل مماس تلك دالة المرسوم عند تلك النقطة.

معادلة المماس : الآن سوف نتوصل لمعادلة المماس الدالة المرسوم عند نقطة $A(x_0, f(x_0))$ في حالة المعامة معادلة المستقيم مع الميل $f'(x_0)$ لها شكل:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b$$ ← ثابت ، $f'(x_0)$ ← بمثابة الميل m .

لإيجاد b سوف نستخدم حقيقة أن خط المماس يمر من نقطة A ~~بالطبع~~ أي : $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$

بالتالي $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

و بتعويض التعبير بدلاً من b سوف نتوصل لمعادلة المماس:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

معنى الميكانيكي للاشتقاق: نعني بالحالة الأبسط لحركة نقطة مادية على طول خط معين ، علاوة على ذلك ، يتم إعطاء قانون الحركة ، أي أحداثيات ~~النقطة~~ النقطة x التي تتحرك هي دالة معروفة $x(t)$ في لحظة t .

خلال الفترة الزمنية من t_0 حتى $t_0 + \Delta t$ فإن إزاحة النقطة تساوي إلى $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta t$ والسرعة المتوسطة هي $V_a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ عند $\Delta t \to 0$ عندها قيمة السرعة المتوسطة تميل لقيمة معينة التي تدعى بالسرعة اللحظية $v(t_0)$ للنقطة المادية في لحظة t_0 لكن وفقاً لتعريف الاشتقاق لدينا :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)$$

بالتالي $v(t_0) = x'(t_0)$ أي اشتقاق الأصلي المتعلق بالزمن هو سرعة.
هذا هو معنى الميكانيكي للاشتقاق. بالقياس على ذلك فإن التسارع
هو مشتق سرعة المتعلقة بالزمن: $a = v'(t)$.

التفاضل وعلاقته بالاشتقاق:
تفاضل دالة هو جداء المشتق $f'(x_0)$ مع تغير (زيادة) المتحول Δx

$$df = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

خصائص أساسية للاشتقاق والتفاضل:

if $u(x) =$ ثابت عندها $u'(x) = 0$, $du = 0$

if $u(x)$ و $v(x)$ دوال قابلة للتفاضل عند نقطة x_0

عندها:

اشتقاق دالة المركبة، تعتبر الدالة المركبة هي دالة التي متحولها أيضاً دالة
أي $h(x) = g(f(x))$ عندما إذا كانت دالة f لها مشتق عند نقطة x_0 ودالة
g لها مشتق عند نقطة $f(x_0)$ عندها دالة المركبة h لها أيضاً مشتق
عند x_0 محسوبة بالصيغة:

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

مثال 1: أوجد مشتق الدالة التالية باستخدام تعريف الاشتقاق.

$$f(x) = 2x^2 - 16x + 35$$

الحل: بالتالي هنا حيث نحتاج لحل هذه الدالة حسب تعريف الاشتقاق

$f'(x) = \lim$ ______ ونعوض الحد.

$= \lim$ ______

لكن كن حذراً وتأكد من التكامل بشكل صحيح مع الأقواس عند الاختصارات ↑

$f'(x) = \lim$ ______

$= \lim$ ______

لاحظ أن كل حدفي البسط لا يحتوي h فاختصر (أي جميع حدود فيه h) حيث يمكننا إخراج h من بسط (عامل مشترك) سوف يختصر مع h في المقام

بعد ذلك سيمكن أخذ النهاية.

$f'(x) = \lim$ ______

$= \lim$ ______

$= \boxed{4x - 16}$

إذاً المشتق هو $f'(x) = 4x - 16$

ونشرت المحاضرة...

☺ Good luck ☺

☺ Reem Al-Rahabi ☺

* ملاحظة تصلح فقط في حالة الدوال المثلية أما هو تطبيق حساب المشتق

لأي دالة

لكن عندي نهاية كاملة ألف مرة جربته.

Application of derivative in investigation of functions

Continuity and differentiability of function. Sufficient conditions of functions monotony. Darboux's theorem. Intervals of function monotony. Critical points. Extreme (minimum, maximum). Points of extreme. Necessary condition of extreme. Sufficient conditions of extreme. Plan of function investigation.

Relation between continuity and differentiability of function. *If a function is differentiable at some point, then it is a continuous function at this point. Contrary is invalid: a continuous function can have no derivative.*

C o n s e q u e n c e. *If a function is discontinuous at some point, then it has no derivative in this point.*

E x a m p l e The function $y = |x|$ (Fig.3) is continuous everywhere, but it has no derivative at $x = 0$, because a tangent of the graph at this point does not exist.

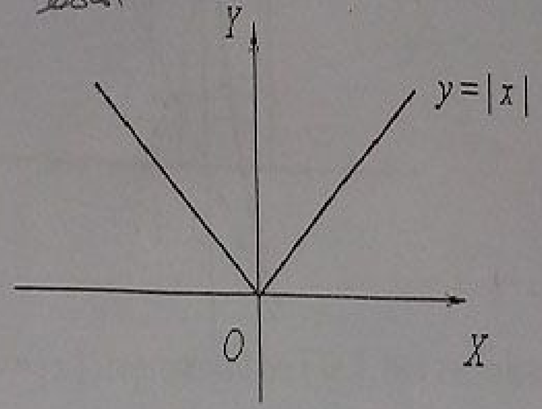

Fig. 3

Sufficient conditions of functions monotony.

If $f'(x) > 0$ at every point of an interval (a, b), then a function $f(x)$ increases within this interval.

If $f'(x) < 0$ at every point of an interval (a, b), then a function $f(x)$ decreases within this interval.

Darboux's theorem. *Points, at which a derivative of a function is equal to 0 or doesn't exist, divide a function domain for such intervals that within each of them a derivative saves a constant sign.*

Using these signs it is possible to find *intervals of monotony* of functions, what is very important in investigations of functions.