- الفصل الأول : المنحنيات في الفضاء الثلاثي -

1- المتجهات الطليقة والدوال متجهية القيمة وحقول المتجهات ..

* المتجه المقيد والمتجه الطليق :

- المتجه المقيد في نقطة A من الفضاء ثلاثي البعد، هو ثنائية (زوج مرتب) (A,B)، أو قطعة مستقيمة موجهة AB مبدؤها النقطة A ونهايتها نقطة أخرى من الفضاء ولتكن B.

- نرمز للمتجه المقيد بالرمز: $\overrightarrow{AB}$.
- يعرف طول المتجه بأنه البعد بين النقطتين A, B . (أو طول القطعة المستقيمة $[AB]$).
ونرمز لطول المتجه المقيد بالرمز: $\|\overrightarrow{AB}\|$.

- إذا كانت $A=B$ ، ندعو المتجه المقيد $\overrightarrow{AA}$ بالمتجه المقيد الصفري في A .

* نستطيع أن نعرف على مجموعة المتجهات المقيدة في الفضاء علاقة تكافؤ كما يلي:
- نقول عن متجه مقيد $\overrightarrow{AB}$ إنه يكافئ (يساير) متجهاً آخر $\overrightarrow{CD}$ ونكتب: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ (أو $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$)، إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1- للمتجهين الطول نفسه.

2- للمتجهين المنحى نفسه. (أي حاملاهما متوازيان أو يقعان على نفس المستقيم).

3- للمتجهين الاتجاه نفسه.

* يبرهن بسهولة على أن العلاقة السابقة علاقة تكافؤ، فإننا نعلم أن كل متجه يساير نفسه (أي العلاقة انعكاسية)، وإذا ساير متجه $\overrightarrow{AB}$ متجهاً $\overrightarrow{CD}$ فإن $\overrightarrow{CD}$ يساير $\overrightarrow{AB}$ أيضاً (أي العلاقة تناظرية)، أخيراً إذا ساير متجه $\overrightarrow{AB}$ متجهاً $\overrightarrow{CD}$ وكان $\overrightarrow{CD}$ مسايراً لمتجه $\overrightarrow{EF}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ يساير $\overrightarrow{EF}$ (أي العلاقة متعدية)

*- إن علاقة التكافؤ السابقة تجزئ مجموعة المتجهات ، وهذه التجزئة عناصرها عبارة عن صفوف تكافؤ ..

إن كل صف تكافؤ من المتجهات المقيدة المتكافئة فيما بينها ندعوه: متجهاً طلقاً . أي أن:

$[\overrightarrow{AB}]$ عبارة عن صف تكافؤ عناصره كل المتجهات المقيدة المسايرة للمتجه $\overrightarrow{AB}$.

وندعو $\overrightarrow{AB}$ هنا بممثل صف التكافؤ في النقطة A.

*- سنرمز للمتجه الطلق $[\overrightarrow{AB}]$ بالرمز $\overrightarrow{AB}$ وندعوه "متجهاً طلقاً ممثلاً بالمتجه المقيد $\overrightarrow{AB}$ في النقطة A.

// ملاحظات //:

① - كل متجه مقيد $\overrightarrow{AB}$ يعين متجهاً طلقاً $\overrightarrow{AB}$ ، وبالعكس ، إذا أعطينا نقطة A من الفضاء فإن كل متجه طلق يحوي بالضبط متجهاً مقيداً وحيداً مبدؤه النقطة A (أي أن كل متجه طلق يملك ممثلاً وحيداً في كل نقطة من الفضاء).

② - إن تكافؤ المتجهين المقيدين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ يقتضي بالضرورة المطابقة: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وبالعكس.

③ - طول المتجه الطلق هو طول أحد ممثليه ، لأن المتجهات المتسايرة لها نفس الطول ، ونرمز لطول هذا المتجه بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\|$.

④ - كل المتجهات المقيدة الصفرية متكافئة ، وهي تمثل متجهاً طلقاً واحداً ندعوه المتجه الطلق الصفري ونرمز له: « $\overrightarrow{O}$ ». وطول هذا المتجه صفر.

⑤ - نرمز للمتجه الذي له نفس طول متجه $\overrightarrow{AB}$ ويعاكسه بالاتجاه بـ: $\overrightarrow{BA}$

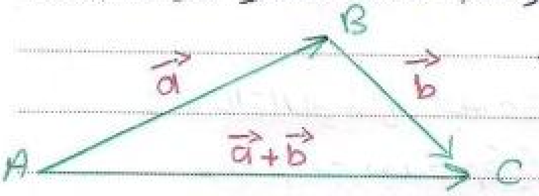
أي أننا لو رمزنا لـ $\overrightarrow{AB}$ بـ $\vec{a}$ فإن: $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$

*- العمليات على المتجهات :

1- جمع المتجهات :

- يعرف مجموع متجهين $\vec{a} ، \vec{b}$ بحيث : $\vec{a}=\vec{AB}$, $\vec{b}=\vec{BC}$ ، والذي نرمز له بالرمز : $\vec{a}+\vec{b}$ بأنه المتجه الممثل بالمتجه المقيد $\vec{AC}$

أي أن : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}$



- وإن هذا التعريف مستقل عن اختيار النقطة A .. كما أن جمع المتجهات يحقق الخواص التالية :

1- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

أي أن مجموعة المتجهات الطليقة المزودة بعملية الجمع هي زمرة تبديلية .

*- يعرف عادةً طرح المتجهات بالعلاقة : « $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ »

*- إن أطوال المتجهات تحقق المتباينة : $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$

والتي تدعى متباينة المثلث ، وتتحقق المساواة في المتباينة السابقة إذا وفقط إذا كان للمتجهين الاتجاه نفسه .

2- ضرب متجه بعدد حقيقي :

- يعرف ضرب متجه $\vec{a}$ بعدد حقيقي λ ، والذي نرمز له : $\lambda.\vec{a}$ ، بأنه ذلك المتجه ذو الطول : $\|\lambda\vec{a}\|=|\lambda|.\|\vec{a}\|$ ..

والذي يتفق في الاتجاه مع $\vec{a}$ عندما $\lambda>0$ ، ويختلف معه في الاتجاه عندما $\lambda<0$ .. وإن هذا الضرب يحقق الخواص التالية :

1 - $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda.\vec{a} + \mu\vec{a}$

2 - $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b}$

3 - $\lambda(\mu.\vec{a}) = (\lambda.\mu)\vec{a}$

4 - $1.\vec{a} = \vec{a}$, $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$

5 - $0.\vec{a} = 0$, $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$

- وبالتالي فإن مجموعة المتجهات الطليقة المزودة بعمليتي جمع المتجهات والضرب بعدد حقيقي .. تشكل فضاءً متجهياً على الحقل IR .

3 - الضرب السلمي (أو الجداء الداخلي ، أو الجداء النقطي) :

- إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ متجهين غير صفريين نقول عن العدد الحقيقي :

« $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos(\hat{\vec{a},\vec{b}})$ »

إنه الجداء السلمي (الداخلي) للمتجهين $\vec{a}, \vec{b}$.

حيث أن : $(\hat{\vec{a},\vec{b}})$ « أو نكتب $\angle(\vec{a},\vec{b})$ » ترمز لزاوية المتجهين المقيدين اللذين لهما نفس المبدأ ويمثلان $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

« نعلم أن الزاوية بين متجهين هي الزاوية بين ممثليهما منطلقين من نفس النقطة »

- إذا كان أحد المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ هو المتجه الصفري نكتب : $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

« يلاحظ بسهولة أن هذه العملية ليست داخلية إذ أن الناتج عدد وليس شعاع » .

- نستنتج بسهولة الخواص التالية :

1 - الشرط اللازم والكافي لكي يكون : ($\vec{a}.\vec{b} = 0$) هو أن يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري ، أو أن يكون المتجهين متعامدين .

2 - إذا كان للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ الاتجاه نفسه (أي الزاوية بينهما صفر) فإن :

« $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$ »

وبشكل خاص: « $\vec{a}.\vec{a} = \|\vec{a}\|^2 = \vec{a}^2$ ».

3 - $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

4 - $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

5 - $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$

6 - $\vec{a}.(\lambda.\vec{b}) = \lambda.(\vec{a}.\vec{b})$

7 - $(\lambda.\vec{a}).\vec{b} = \lambda.(\vec{a}.\vec{b})$

*- الاستقلال الخطي والارتباط الخطي لمجموعة متجهات:

- نقول عن المتجهات: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ إنها مرتبطة خطياً إذا وُجد n عدد حقيقي $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ليست جميعها أصفاراً، بحيث تحقق:

« $\lambda_1.\vec{a}_1 + \lambda_2.\vec{a}_2 + \dots\dots + \lambda_n.\vec{a}_n = \vec{0}$ »

- وإذا لم يكن تحقق المساواة السابقة ممكناً إلا في حال كانت: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
قلنا عن المتجهات إنها مستقلة خطياً.

« خواص هامة »..

1 - إذا حوت مجموعة المتجهات المتجه الصفري فإنها ستكون مرتبطة خطياً حكماً.

2 - (المتجهان $\vec{a}, \vec{b}$ مرتبطان خطياً) $\Leftrightarrow$ ($\vec{a} \parallel \vec{b}$).

3 - تكون المتجهات $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مرتبطة خطياً إذا كانت الممثلات لهذه المتجهات والمنطلقة من نفس النقطة واقعة في مستوٍ واحد.

4 - يوجد في الفضاء الثلاثي دائماً ثلاثة متجهات مستقلة خطياً (أي يوجد

موزاييك

ثلاثة واحدة على الأقل مستقلة خطياً) ، لكن أي مجموعة مؤلفة من
أربعة متجهات (فما فوق) هي حتماً مرتبطة خطياً.
(وهذا يعني أن بعد فضاء المتجهات الطلقة هو (3)).

5- إذا كانت $\vec{e}_3$ ، $\vec{e}_2$ ، $\vec{e}_1$ ثلاثة متجهات مستقلة خطياً فإنها تشكل قاعدة (أساس) لفضاء المتجهات الطلقة.
وبالتالي فإن أي متجه طلق $\vec{a}$ يكتب وبشكل وحيد كتركيب خطي لهذه المتجهات (العناصر القاعدة) ، أي أن :

$$\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3$$

«الترتيب في القاعدة مهم جداً».

«ملاحظة»:
- لإثبات أن مجموعة ما مولدة للفضاء نعتمد للسهولة (دون التعريف) على بعد هذا الفضاء ، فإن كان عدد عناصر المجموعة يساوي بعد الفضاء كانت مستقلة (ومن ثم مولدة).

«تذكرة»:
- بعد الفضاء هو عدد عناصر أكبر مجموعة مستقلة منه بحيث أي مجموعة يزيد عدد عناصرها عن عدد عناصر هذه المجموعة تكون مرتبطة خطياً.

* - توجيه الفضاء المتجهي ثلاثي البعد :

- لتكن: $\vec{e}_3$ ، $\vec{e}_2$ ، $\vec{e}_1$ ثلاثة متجهات مستقلة ، ولتكن $\vec{v}_3$ ، $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_1$ ثلاثة متجهات أخرى ، عندئذ توجد أعداد حقيقية λ_i^j «j دليل علوي وليس قوة» ، بحيث يكون :

$$\vec{v}_1 = \lambda_1^1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_1^2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_1^3 \cdot \vec{e}_3$$
$$\vec{v}_2 = \lambda_2^1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2^2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_2^3 \cdot \vec{e}_3$$
$$\vec{v}_3 = \lambda_3^1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_3^2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3^3 \cdot \vec{e}_3$$

ولنأخذ محدد الأمثال :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ \lambda_3^1 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \end{vmatrix}$$

*-($\Delta=0$) $\Longleftrightarrow$ المتجهات $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ مرتبطة خطياً. (وعندما $\Delta\neq0$ تكون مستقلة).

*-($\Delta>0$) $\Longleftrightarrow$ للثلاثيتين المرتبتين $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ و $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ نفس التوجيه.

*-($\Delta<0$) $\Longleftrightarrow$ للثلاثيتين المرتبتين $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ و $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ توجيهين متعاكسين.

(تعريف): الفضاء الثلاثي الموجه:

هو فضاء ثلاثي مزوّد بقاعدة (أي بثلاثية مرتّبة من المتجهات المستقلة).

// ملاحظة هامة //..

- كما ذكرنا الترتيب في عناصر القاعدة مهم جداً، وذلك لأنه إذا بدلنا في ترتيب متجهين من عناصر القاعدة سنحصل على قاعدة لها توجيه معاكس للقاعدة الأصلية، ولكن التبديل الدوري (الدوراني) بين عناصر القاعدة يحافظ على التوجيه..

- مثال:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \longrightarrow (\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \longrightarrow (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$$

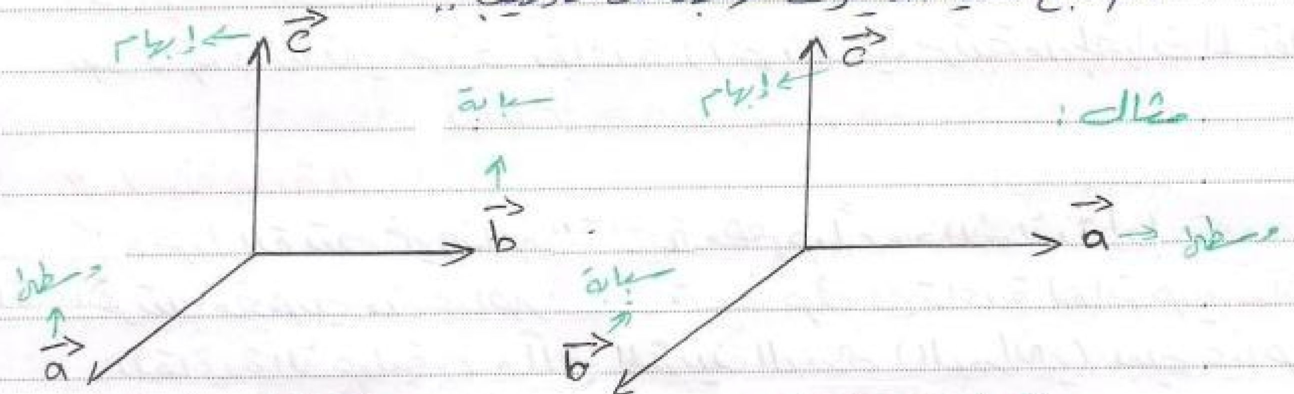
- للثلاثيتين $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ و $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1$ نفس التوجيه.

- ولكن للثلاثيتين: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ و $\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3$ توجيهين متعاكسين.

* لتكن الآن لدينا فضاء ثلاثياً موجهاً ، عندئذٍ :
- نقول عن ثلاثية منه إن لها توجيه موجب إذا كان لها توجيه القاعدة.
- نقول عن ثلاثية منه إن لها توجيه سالب إذا كان لها توجيه معاكس لتوجيه القاعدة.

* نقول عن ثلاثية من المتجهات $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ إنها يمينية إذا كان لها نفس توجيه الثلاثية المؤلفة من أصابع اليد اليمنى : الإبهام ، السبابة ، الوسطى.
- ونقول إنها يسارية إذا كان لها نفس توجيه الثلاثية المؤلفة من أصابع اليد اليسرى وبنفس الترتيب..

مثال :



" ثلاثية يمينية " " ثلاثية يسارية "

" $\vec{a}$ تتجه باتجاهك " " $\vec{a}$ تتجه باتجاهك "

" انتهت المحاضرة ☺ "

M^3