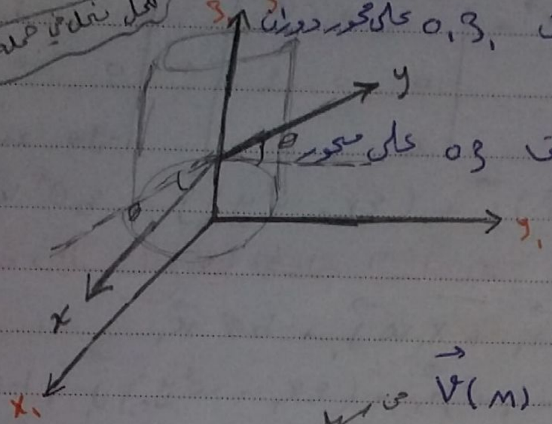
تمرين (١): أسطوانة دائرية تتحرك بحركة لولبية محورها ينطبق على محور الأسطوانة. المطلوب تعيين سرعة وتسارع نقطة من سطح الأسطوانة بفرض خطوة متحركة $b = 2$ ومعادلة الحركة $\theta = 2t^2$

الحل بنقل في جملة متماسكة

الحل: نختار جملة محاور ثابتة $o_1x_1y_1z_1$ بحيث ينطبق o_1z_1 على محور دوران الأسطوانة.



ونختار جملة محاور متحركة $oxyz$ بحيث ينطبق oz على محور الأسطوانة.

$$\forall M \in S : \vec{V}(M) = b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\omega} = 4t\vec{k} \quad , \quad \vec{\varepsilon} = 4\vec{k}$$

$$\vec{V}(M) = 8t\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4t \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

من السهل إذا لم يعطونا أي شيء لنستخدم جملة إحداثيات، فإننا نأخذ أي إحداثيات جملة متماسكة.

$$\vec{V}(M) = -4yt\,\vec{i} + 4xt\,\vec{j} + 8t\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = b\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= 8\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4t \\ -4yt & 4xt & 8t \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-4y - 16xt^2)\vec{i} + (4x - 16yt^2)\vec{j} + 8\vec{k}$$

تمرين (٢): يتحرك قرص دائري نصف قطره a بحركة لولبية حول محوره بسرعة زاوية ثابتة $\omega = \omega_0$ علماً أن محور القرص ينتقل بمقدار $2\omega_0$ عندما يتم القرص دورة كاملة حول محوره والمطلوب تعيين مسار ~~...~~ وسرعة وتسارع ~~...~~ النقطة M من محيط القرص.

الحل: إن:

$$z = 2\pi b$$

$$2\omega_0 = 2\pi b \Rightarrow b = \frac{\omega_0}{\pi}$$

ولدينا:

$$\omega = \theta' \Longrightarrow \theta = \int \omega \, dt$$

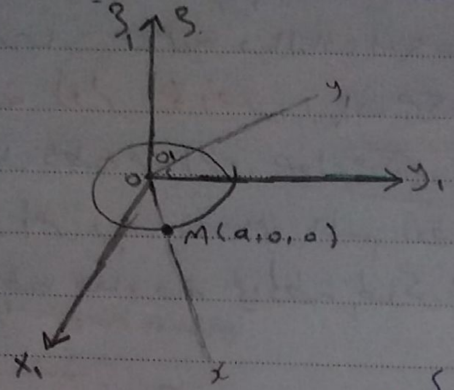
$$= \int \omega_0 \, dt$$

$$\theta = \omega_0 t + \theta_0$$

نفرض أنه في بداية الحركة $t = 0 \,؛\, \theta = 0 \Leftarrow \theta_0 = 0 \Leftarrow \theta = \omega_0 t$

/ /

نختار جملة محاور $O_1x_1y_1z_1$ بحيث ينطبق محور الدوران على O_1z_1 ونختار جملة محاور $Oxyz$ بحيث ينطبق على محور الدوران Oz ، نختار M بحيث تكون واقعة على أحد محاور وليكن Ox .



$$\forall M \in S, \quad \overrightarrow{O_1M} = b\theta\vec{k} + \overrightarrow{OM}$$
$$= b\theta\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + (b\theta + z)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{O_1M} = x(\cos\theta\,\vec{i}_1 + \sin\theta\,\vec{j}_1) + y(-\sin\theta\,\vec{i}_1 + \cos\theta\,\vec{j}_1) + (b\theta + z)\vec{k}$$

معادلة حركة M في جملة ثابتة

$$\begin{cases} x_1 = x\cos w_0 t - y\sin w_0 t \\ y_1 = x\sin w_0 t + y\cos w_0 t \\ z_1 = z + b w_0 t \end{cases}$$

لكن عند $M(a,0,0)$

$$x_1 = a\cos w_0 t \quad (1)$$
$$y_1 = a\sin w_0 t \quad (2)$$
$$z_1 = b w_0 t \quad (3) \Rightarrow t = \frac{z_1}{b w_0} = \frac{\pi z_1}{w_0^2}$$

لمعرفة معادلة المسار يجب حذف الزمن لذا من (3) عزلنا t.

$$\Rightarrow x_1 = a\cos\frac{\pi z_1}{w_0} \quad — *$$
$$y_1 = a\sin\frac{\pi z_1}{w_0} \quad — **$$

بتربيع (*) و (**) والجمع

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad — ***$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها a في المستوي oxy

أما معادلة المسار هي تقاطع (***) مع (*) أو (**)

معادلة سطح اسطوانة مع محور oz

سرعة M نشتق معادلات الحركة:

$$\vec{V}(M) = \begin{cases} x_1' = -a w_0 \sin w_0 t \\ y_1' = a w_0 \cos w_0 t \\ z_1' = b w_0 \end{cases}$$

تسارع M :

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{cases} x_1'' = -a w_0^2 \cos w_0 t \\ y_1'' = -a w_0 \sin w_0 t \\ z_1'' = 0 \end{cases}$$

الحركة منتظمة لأن سرعة زاوية ثابتة

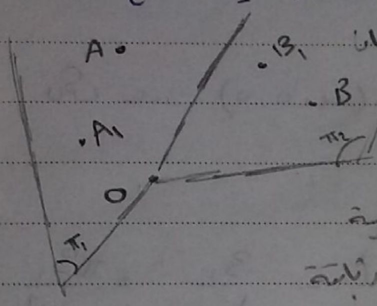
/ /

مهم جداً — **الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة**

تعريفها: هي حركة جسم صلب ثبتت فيه نقطة واحدة ونعلم أنه إذا ثبتت نقطة من جسم صلب فله 3 درجات من حرية وبالتالي له 3 معادلات للحركة.

نظرية أولر دالا أمبير: إن حركة الجسم الصلب الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية في كل لحظة من الزمن حول محور آنيه يمر من هذه النقطة ونسمي هذا المحور بالمحور الآني للدوران
بمعنى آخر: إذا ثبتنا في الجسم نقطة فإنه في كل لحظة يوجد مستقيم في الجسم يمر من تلك النقطة سرع نقاطه معدومة في اللحظة المذكورة.
نقاط المستقيم

البرهان: لتكن S جسم صلب ولتكن O نقطة ثابتة فيه ولتكن $A, B \in S$ بحيث لا تقع كل من A و B و O على استقامة واحدة.



ولنفرض أن $\vec{v}(A) \neq 0$ و $\vec{v}(B) \neq 0$
وأن $\vec{v}(B) \neq \vec{v}(A)$ لا تساوي
وأن $\vec{v}(B) \nparallel \vec{v}(A)$ لا توازي

لأنه إذا أصبحت تساوي صفر فإن نظرية لا معنى لها عندها يكونوا إما OA أو OB هو محور آني
لو كان $v(A) = v(B)$ تكون حركة انسحابية وبالتالي تكون O غير ثابتة
في حال $v(B) \parallel v(A)$ تكون نظرية مساقط غير محققة علماً أننا ثبتنا شرط أول وثاني

أولاً: إن $\vec{v}(A) \neq 0$ لأنه لو كانت $\vec{v}(A) = \vec{0}$، O نقطة ثابتة $\Leftarrow \vec{v}(O) = \vec{0} \Leftarrow$ OA محور آني
وإن $\vec{v}(B) \neq 0$ " " " " $v(B) = \vec{0}$، O " " " $\Leftarrow \vec{v}(O) = \vec{0} \Leftarrow$ OB " "

ثانياً: إن $\vec{v}(B) \neq \vec{v}(A)$ لأنه لو كانت $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$ و بما أن لدينا شرط أول $\vec{v}(A) \neq \vec{0}$ و $\vec{v}(B) \neq \vec{0}$ فتكون الحركة انسحابية.

ثالثاً: إذا كانت $\vec{v}(A) \neq \vec{0}$ و $\vec{v}(B) \neq \vec{0}$ و $\vec{v}(B) \neq \vec{v}(A)$ و $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ عندئذ تكون نظرية مساقط غير محققة.

إذن بتحقق شروط ثلاث، لنأخذ النقطتين O, A ولنطبق نظرية المساقط عليهما.

$$\vec{v}(A) \cdot \vec{OA} = \vec{v}(O) \cdot \vec{OA} = 0$$

نقطة O ثابتة سرعتها 0

$$\Rightarrow \vec{v}(A) \cdot \vec{OA} = 0 \Rightarrow \vec{v}(A) = \vec{0} \text{ أو } \perp \vec{OA}$$

أيضاً نطبق نظرية مساقط على النقطتين O, B

$$\Rightarrow \vec{v}(B) = \vec{0} \text{ أو } \perp \vec{OB}$$

إعداد : أليم الرحبي.   / /

لنفرض مستويين π_1 يحوي $\vec{OA}$ ويعامد سرعة A أي $\pi_1 \perp \vec{v}(A)$

والمستوي π_2 " $\vec{OB}$ " " B أي $\pi_2 \perp \vec{v}(B)$

ولنأخذ A_1 من المستوي π_1 ، ونقطة B_1 من المستوي π_2 .

(آ) لنطبق نظرية المساقط على النقطتين A_1 و O

$$\vec{v}(A_1)\cdot\vec{OA_1} = \vec{v}(O)\cdot\vec{OA_1} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}(A_1)\cdot\overset{\text{ثابتة}}{\vec{OA_1}} = 0 \Rightarrow \vec{v}(A_1) = \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \vec{OA_1}\end{cases}$$

(ب) نطبق نظرية مساقط على A ، A_1 .

$$\vec{v}(A)\cdot\vec{AA_1} = \vec{v}(A_1)\cdot\vec{AA_1} = 0$$

لدينا π_1 يحوي OA ويعامد $V(A)$ ولدينا AA_1 ينتمي لـ π_1 ومنه $V(A) \perp AA_1$ وبالتالي جداء سلمي معدوم

$$\Rightarrow \vec{v}(A_1) = \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \vec{AA_1}\end{cases}$$

من (آ) و (ب)

$$\vec{v}(A_1) = \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \pi_1\end{cases}$$

وبنفس طريقة

$$\vec{v}(B_1) = \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \pi_2\end{cases}$$

مهم

بما أن مستويي π_1 و π_2 يمران بالنقطة O فيوجد فصل مشترك لهما ولنبرهن أن نقاط هذا فصل مشترك تكون معدومة.

لنأخذ نقطة أخرى من فصل مشترك للمستويين π_1 و π_2 ولتكن O' و لنبرهن أن $\vec{v}(O') = \vec{0}$.

لفصل مشترك $O' \in$ $\Rightarrow \begin{cases} O' \in \pi_1 & \text{تحقق شروط } A_1 \\ O' \in \pi_2 & B_1 \text{ " "} \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}(O') &= \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \pi_1\end{cases} \\ \vec{v}(O') &= \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \pi_2\end{cases}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{v}(O') = \begin{cases}\vec{0}\\ \perp \pi_1 \cap \pi_2\end{cases}$$

لا يمكن أن يكون شعاع يعامد مستويين متقاطعين ومنه $\vec{v}(O') = \vec{0}$