/ /

المحاضرة الثانية

لندرس تقارب متسلسلة نيومان التي حصلنا عليها في المحاضرة السابقة

لنأخذ المقدار $\int_a^b k_m(x,s) f(s) ds$ ومن متراجحة كوشي شفارتز

$$\left| \int_a^b k_m(x,s) . f(s) ds \right|^2 \leq \int_a^b |k_m(x,s)|^2 ds . \int_a^b |f(s)|^2 ds$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b k_m(x,s) . f(s) ds \right|^2 \leq C_m^2 . A^2 \quad \dots \text{I}$$

حيث $\int_a^b |k_m(x,s)|^2 ds = C_m^2$ و $A^2 = \int_a^b |f(s)|^2 ds$

ولدينا: $k_m(x,s) = \int_a^b k_1(x,\tau) . k_{m-1}(\tau,s) \, d\tau$

وبتطبيق متراجحة كوشي شفارتز عليها نجد:

$$|k_m(x,s)|^2 \leq \int_a^b |k_{m-1}(x,\tau)|^2 d\tau . \int_a^b |k_1(\tau,s)|^2 d\tau$$

نكامل الطرفين بالنسبة لـ s:

$$\int_a^b |k_m(x,s)|^2 ds \leq \int_a^b |k_{m-1}(x,\tau)|^2 d\tau . \int_a^b \int_a^b |k_1(\tau,s)|^2 d\tau ds$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_x \int_a^b |k_m(x,s)|^2 ds}_{C_m^2} \leq \underbrace{\sup_x \int_a^b |k_{m-1}(x,\tau)|^2}_{C_{m-1}^2} . \underbrace{\int_a^b \int_a^b |k_1(\tau,s)|^2 . d\tau ds}_{\text{اختصاراً سوف نرمز له بـ } B^2}$$

$$\Rightarrow C_m^2 \leq C_{m-1}^2 . B^2 \quad \text{II}$$

بالرجوع إلى I:

$$\left| \int_a^b k_m(x,s) . f(s) ds \right|^2 \overset{\text{II}}{\leq} C_m^2 . A^2 \overset{\text{II}}{\leq} C_{m-1}^2 . A^2 . B^2 \leq \dots$$

$$\dots \underset{\text{II}}{\leq} C_1^2 . A^2 . B^{2m-2}$$

$$\left|\lambda^m \int_a^b k_m(x,s)\cdot f(s)\,ds\right| \leq |\lambda^m|\cdot A\, B^{m-1} C_1$$

$$= A\cdot C_1\cdot B^{-1}(\lambda B)^m$$

$$= \frac{A\cdot C_1}{B}\cdot(|\lambda|B)^m$$

وبالتالي اصبح لدينا متسلسلة هندسية اساسها $|\lambda|\cdot B$ ومجموعها $\frac{1}{1-|\lambda|\cdot B}$

بحيث $|\lambda|\cdot B < 1$ وحسب اختبار فاير شتراس تكون المتسلسلة متقاربة

بانتظام وبالتالي

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,s)\, f(s)\,ds$$

هو حل لمعادلة فريدهولم التكاملية من اجل اي قيمة لـ λ تحقق $|\lambda| < \frac{1}{B}$

مثال: اوجد حل المعادلة التكاملية التالية:

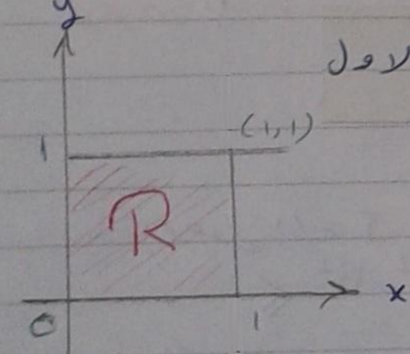
$$g(s) = \sin\pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 g(s)\,ds \quad \ldots (1)$$

الحل:

هذه معادلة فريدهولم التكاملية بحيث

$f(x) = \sin\pi x$

$\lambda = \frac{1}{2}$ عدد مركب القسم الحقيقي له معدوم و $I = [0,1]$ و $k(x,s) = 1$



نختار الشرط الابتدائي $g(s)=0$ فنحصل على التقريب الاول

$$g(s) = 0 \Rightarrow g_0(x) = \sin\pi x$$

وبشكل عام لا يمثل $g_0(x)$ حل للمعادلة

$$\Rightarrow g_1(x) = \sin\pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\pi s\,ds$$

$$g_1(x) = \sin\pi x + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi s\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad g_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sin \pi s \, ds\right)$$

$$g_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}$$

$$* \quad g_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 g_1(s)\, ds$$

$$g_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin \pi s + \frac{1}{\pi}\right) ds$$

$$g_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi}$$

$$* \quad g_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2}\int_0^1 g_2(s)\, ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi}$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2\pi} + \cdots + \frac{1}{2^n\pi}$$

لنأخذ النهاية:

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$g(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

نلاحظ ان $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ متسلسلة هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ ومجموعها $2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \sin x + \frac{2}{\pi}$$

وهو حل المعادلة فريدلهولم

ملاحظة:

يمكن تطبيق طريقة التقريب المتتالي في معادلة فولتيرا التكاملية كما في المثال التالي:

مثال 2: اوجد حل للمعادلة التكاملية التالية:

$$g(x) = 1 + \lambda \int_0^x g(s)\, ds$$

/ /

نضع $g(s)=0$ كشرط ابتدائي فنحصل على التقريب الاول

$$g(s)=0 \Rightarrow g_0(x)=1$$

$$g_1(x) = 1+\lambda\int_0^x 1\, ds = 1+\lambda x$$

$$g_2(x) = 1+\lambda\int_0^x (1+\lambda x)\, ds = 1+\lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2}$$

$$g_3(x) = 1+\lambda\int_0^x \left(1+\lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2}\right) ds$$

$$g_3(x) = 1+\lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!}$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = 1+\lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \dots + \frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{\lambda x}$$ وهو حل للمعادلة

ومنه اجل اي قيمة لـ λ نحصل على حل عام متسلسل للمعادلة...

مثال$_3$: باستخدام طريقة التقريب المتتالي اوجد حل للمعادلة التكاملية التالية:

$$g(x) = 1 - \int_0^x (x-s)\cdot g(s)\, ds$$

نختار $g(s)=0$ كشرط ابتدائي فنحصل على التقريب الاول:

$$g_0(x)=0$$

$$g_1(x) = 1-\int_0^x (x-s)\, g_0(x)\, ds = 1-\int_0^x (x-s)(1)\, ds$$

$$\Rightarrow g_1(x) = 1-\frac{x^2}{2}$$

Magic Book

$$g_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$ ← بالمثل نحصل على $g_3(x)$

$\vdots$

$$g_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

نأخذ النهاية لـ $g_n(x)$ عندما $n \to \infty$:

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

$$\Rightarrow g(x) = \cos x$$ وهو حل المعادلة.

انتهت المحاضرة..