المحاضرة الاولى

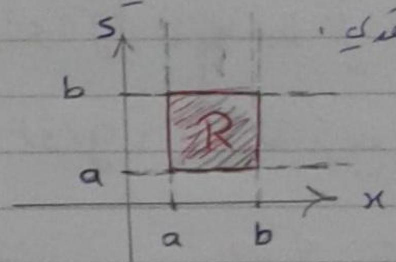
تظهر المعادلات التكاملية بمختلف التطبيقات الهندسية إذا تتطلب لدراسة المعادلات التكاملية مبادئ في التحليل الرياضي والمعادلات التفاضلية إذا سنعالج نوعان من المعادلات هما

1. معادلة فريدهولم التكاملية
2. معادلة فولتيرا التكاملية

سندرس حل هذه المعادلتين من خلال طريقة تقريبات المتتالية ثم نطبق طريقة ثانية لايجاد الحل عن طريق تحويلات لابلاس من اجل حل معادلة فولتيرا التكاملية

- بالتعريف إن كل معادلة من الشكل $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s)\, g(s)\, ds$ تدعى معادلة فريدهولم التكاملية.

حيث $I=[a,b]$ فترة معطاة وان $g(x)$ دالة مجهولة
ونلاحظ ان $g(s)$ واردة داخل رمز التكامل ولذلك دعيت معادلة تكاملية حيث $f(x)$ دالة متصلة (مستمرة) وان $k(x,s)$ نواة المعادلة التكاملية وهي متصلة معرفة على R حيث $R=\{(x,s) : a \le x,s \le b\}$
وحيث ان λ عدد حقيقي او عقدي.



بينما المعادلة من الشكل $g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(s,x)\, g(s)\, dx$
هي معادلة فولتيرا التكاملية
ونلاحظ الفرق بين معادلة فولتيرا وفريدهولم هو ان في معادلة فولتيرا قيمة تتمثل المجال $[a,b]$.

ومن حالة خاصة إذا وضعنا $f(x)=0$ فنحصل على المعادلة المتجانسة لكل من معادلتي فريدهولم وفولتيرا ، اي اننا نحصل على:

(1) --- $g(x) = \lambda \int_a^b k(x,s) \cdot g(s)\, ds$

(2) --- $g(x) = \lambda \int_a^x k(x,s) \cdot g(s)\, ds$

ملاحظة: النواة في كل الأمثلة تتمتع بالخاصية التماثلية أي $k(s,x) = k(x,s)$

- يمكن كتابة معادلة فريدهولم بالشكل:

$$g(x) - \lambda \int_a^b k(x,s) \cdot g(s)\, ds = f(x)$$

والتي أيضاً تكتب بالشكل:

$$L[g(x)] = f(x)$$

حيث أن L مؤثر تكاملي خطي

أي أنه إذا كان A_1 , A_2 ثابتين اختياريين فإن

$$L[A_1 g_1(x) + A_2 g_2(x)] = A_1 L[g_1(x)] + A_2 L[g_2(x)]$$

شرط الخطية

- ونقول عن المعادلة التكاملية أنها غير خطية إذا كانت مثل الشكل التالي:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s) \cdot [g(s)]^2\, ds$$

- نقول عن دالة مثل $g(s)$ أنها مكاملة تربيعياً إذا تحقق:

$$\int_a^b |g(s)|^2\, ds < \infty$$

حيث $g(s)$ دالة متصلة

- ونقول عن النواة $k(x,s)$ أنها مكاملة تربيعياً إذا تحقق الشروط:

1. $$\int_a^b \int_a^b |k(x,s)|^2\, dx\, ds < \infty$$

2. $$\int_a^b |k(x,s)|^2\, ds < \infty \quad \forall x \in [a,b]$$

3. $$\int_a^b |k(x,s)|^2\, dx < \infty \quad \forall s \in [a,b]$$

- طريقة التقريبات المتتالية لحل معادلة فريدهولم الخطية :

. لنفرض ان $f(x)$ ، $k(x,s)$ دوال كمولة وبتعويض $g(s)=0$

. نحصل على التقريب الاول $g_0(x)=f(x)$

. نعوض هذا التقريب بمعادلة فريدهولم نحصل على التقريب الثاني

$$g_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,.\,g_0(s)\,ds$$

. وعليه فان التقريب الثالث هو : $g_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,g_1(s)\,ds$

. وبتكرار العملية السابقة نحصل على التقريب من المرتبة $n+1$:

$$g_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,.\,g_n(s)\,ds$$

. وهكذا حصلنا على متتالية من الحلول $\{g_{n+1}(x)\}$

. فإذا كانت المتتالية متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فيمكن ان نكتب

$$\lim_{n\to\infty} g_{n+1}(x)=g(x) \quad \vee \quad g_{n+1}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$$

. وبالتالي النهاية :

$$\lim_{n\to\infty} g_{n+1}(x)=g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(s,x)\,g(s)\,ds$$

. هو حل للمعادلة التكاملية «فريدهولم».

- لنقوم الآن باجراء بعض الحسابات لايجاد هذه النهاية :

$$g_0(x)=f(x)$$

$$g_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,g_0(s)\,ds$$

نعوض $g_0(x)=f(x)$

$$\Rightarrow g_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,f(s)\,ds$$

$$g_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s)\,g_1(s)\,ds$$

/ /

نعوض $g_1(s)$ في $g_2(x)$:

$$\Rightarrow g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s) \left[f(s) + \lambda \int_a^b k(s,\tau) \cdot f(\tau)\, d\tau \right) ds$$

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s) \cdot f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b k(x,s)\, k(s,\tau)\, f(\tau)\, d\tau\, ds$$

لنفرض ما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned} k_1(x,s) &= k(x,s) \\ k_2(x,s) &= \int_a^b k(x,\tau) \cdot k(\tau,s)\, d\tau \\ k_3(x,s) &= \int_a^b k_1(\tau,x) \cdot k_2(\tau,s)\, d\tau \\ &\vdots \\ k_m(x,s) &= \int_a^b k(x,\tau) \cdot k_{m-1}(\tau,s)\, d\tau \end{aligned}}$$

وبالتالي

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s)\, f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b f(s)\, ds \int_a^b k(x,s) \cdot k(s,\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,s) \cdot f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b f(s) \cdot k_2(x,s)\, ds$$

وبالمثل بالنسبة لـ $g_3(x)$ أي:

$$g_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k_1(x,s)\, f(s)\, ds + \lambda^2 \int_a^b k_2(x,s) \cdot f(s)\, ds + \lambda^3 \int_a^b k_3(x,s)\, f(s)\, ds.$$

$$\vdots$$

$$g_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_a^b k_m(x,s)\, f(s)\, ds$$

نسمي $k_m(x,s)$ النواة المكررة الـ m

ولنفرض أن المتسلسلة متقاربة بانتظام وهو شرط لازم وكافٍ لوجود النهاية أي

$$\boxed{g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,s)\, f(s)\, ds}$$

إن المتسلسلة في الطرف الأخير ندعوها متسلسلة نيومن أو نيومان