*- الجداء المتجهي (الخارجي أو الشعاعي):

- ليكن $\vec{a}, \vec{b}$ متجهين في فضاء موجه، يعرف الجداء المتجهي لـ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ والذي يرمز له بالرمز: $\vec{a}\wedge\vec{b}$ (أو $\vec{a}\times\vec{b}$)، على أنه متجه عمودي على $\vec{a}, \vec{b}$ بحيث تكون الثلاثية: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\wedge\vec{b}$ ذات توجيه موجب (أي لها نفس توجيه القاعدة).
- يعطى طول هذا المتجه بالمساواة:

$$\|\vec{a}\wedge\vec{b}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$$

*- إذا كان المتجهان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مرتبطان خطياً فالجداء المتجهي لهما يساوي الصفر. وبالعكس، إذا كان الجداء المتجهي للمتجهين صفر فهما مرتبطان خطياً.

*- يحقق الجداء المتجهي العلاقات التالية:

1- $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a}$

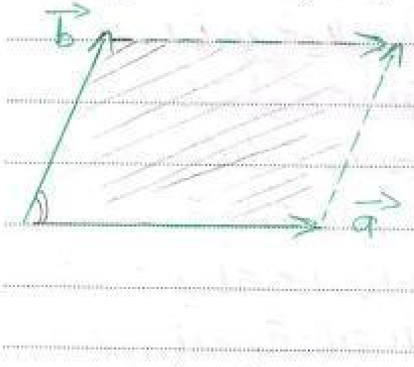
2- $(\lambda.\vec{a})\wedge\vec{b} = \vec{a}\wedge(\lambda.\vec{b}) = \lambda.(\vec{a}\wedge\vec{b})$

3- $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{c}$

4- $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c} = \vec{a}\wedge\vec{c} + \vec{b}\wedge\vec{c}$

5- $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{c}.\vec{b}).\vec{a}$

*- في حال كان المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مستقلين فإن طول متجه الجداء المتجهي يمثل هندسياً مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على ممثلي هذين المتجهين المنطلقين من نفس النقطة.



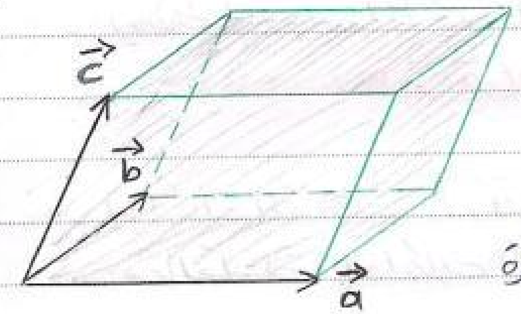
*- الجداء المختلط:

- لتكن: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ثلاثة متجهات في فضاء موجه، يعرف الجداء المختلط لهذه المتجهات، والذي يرمز له: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ بأنه العدد:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

* الجداء المختلط لثلاثة متجهات مرتبطة خطياً يساوي الصفر، والعكس صحيح.

* القيمة المطلقة للجداء المختلط لثلاثة متجهات مستقلة خطياً تساوي حجم متوازي السطوح المنشأ على ممثلات لـ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ والمنطلقة من نفس النقطة.



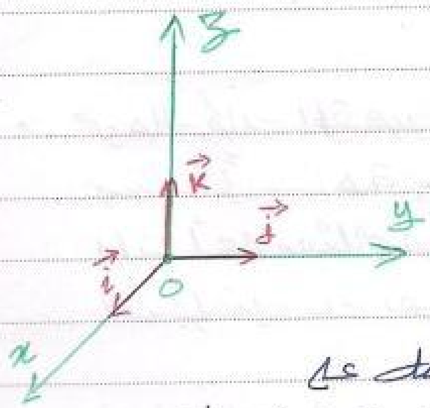
* تتطابق إشارة الجداء المختلط مع إشارة توجيه الثلاثية $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

* التبديل بين موضعي متجهين في الجداء المختلط يغير من إشارته، بينما التبديل الدوراني يحافظ على الإشارة.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

* مركبات متجه:



- لنأخذ في الفضاء الثلاثي ثلاثة محاور متقاطعة في نقطة O ومتعامدة مثنى مثنى، ولنرمز لها $Oxyz$. ولنأخذ متجهات واحدة هذه المحاور، وبالتالي نحصل على جملة محاور إحداثية متعامدة، وكون الجملة متعامدة يعني أن متجهات الواحدة $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ والمنطلقة من O لا تقع في مستوٍ واحد. أي أن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ مستقلة خطياً، وعليه هي تشكل قاعدة لفضاء المتجهات. أي أن:

أي متجه $\vec{a}$ يكتب كتركيب خطي بثلاثة عناصر القاعدة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ ، أي :

$$\vec{a} = a_1 . \vec{i} + a_2 . \vec{j} + a_3 . \vec{k}$$

بحيث : a_1 ، a_2 ، a_3 أعداد حقيقية ، ندعوها مركبات المتجه $\vec{a}$ بالنسبة للقاعدة $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ ((أو بالنسبة للجملة $oxyz$)).

وبذلك نستطيع أن نكتب : $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

- وبالتالي يوجد تقابل بين $\mathbb{R}^3$ ومجموعة المتجهات .. وبالتالي أصبح بالإمكان أن نقول : إن مجموعة المتجهات هي $\mathbb{R}^3$.

*- تحقق متجهات القاعدة المتطابقات :

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$$
$$\vec{i} . \vec{j} = \vec{j} . \vec{k} = \vec{k} . \vec{i} = 0$$

*- تحقق مركبات أي متجه $\vec{a}$ العلاقات :

$$a_1 = \vec{a} . \vec{i} \quad , \quad a_2 = \vec{a} . \vec{j} \quad , \quad a_3 = \vec{a} . \vec{k}$$

*- ليكن الفضاء موجهاً ولـ $\vec{k}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{i}$ توجيهاً موجباً ، عندئذ :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \quad , \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

*- العمليات على المتجهات كمركبات :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ ((الجداء المتجهي))

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ ((الجداء المختلط))

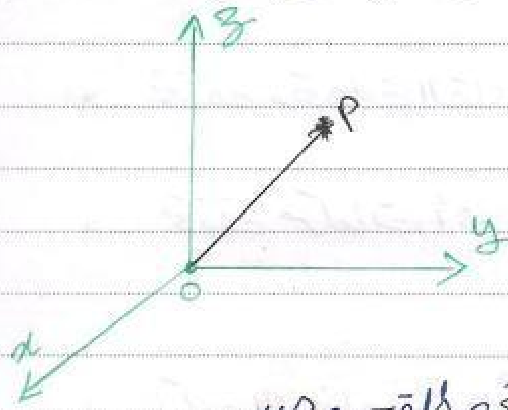
- فضاء النقاط $\cong$ فضاء المتجهات $\cong \mathbb{R}^3$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$ «طول متجه»

*- أيضاً :

- $(a_1, a_2, a_3) \mp (b_1, b_2, b_3) = (a_1 \mp b_1, a_2 \mp b_2, a_3 \mp b_3)$
- $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3)$
- $\lambda (a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$

*- إذا كانت P نقطة من الفضاء الثلاثي المزود بجملة إحداثية $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فإنه يوجد أعداد حقيقية x, y, z بحيث يكون :



$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$

- ندعو $\vec{OP}$ متجه موضع النقطة P.

وندعو x, y, z بإحداثيات النقطة P.

*- يقابل كل نقطة P من الفضاء الثلاثي متجه طلق وحيد $\vec{OP}$ ، وبالعكس :

كل متجه طلق $\vec{A}$ يقابل نقطة في الفضاء الثلاثي مثل P ، بحيث يكون : «$\vec{A} = \vec{OP}$».

«انتهت المحاضرة»

M^3