مراجعات:

$f : X \longrightarrow Y$

نقول عن f إنه تطبيق: $x_1, x_2 \in X : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

لتكن لدينا $G \neq \emptyset$

قانون تشكيل داخلي $* : G \times G \to G$

$(g_1, g_2) \to g_1 * g_2 \in G$

إن $(G, *)$ $\boxed{\text{زمرة}}$ إذا:

1) $x * (y * z) = (x * y) * z$

2) $\exists\, e \in G$:

$e * x = x * e = x \quad \forall x \in G$

3) $\forall x \in G : \exists\, x' \in G$

$x * x' = x' * x = e$

وتكون $(G, *)$ $\boxed{\text{زمرة تبديلية}}$ إذا تحقق بالإضافة إلى ثلاثة الشروط السابقة هذا الشرط الإضافي

$\forall x, y \in G : x * y = y * x$

أمثلة على الزمر: $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبديلية

$\bar{4} + \bar{4} = \bar{8} = \bar{3}$ ← $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ زمرة

$8 \div 5$: $8 - 3 \to 3$

$(U(n), \cdot)$ زمرة ضربية

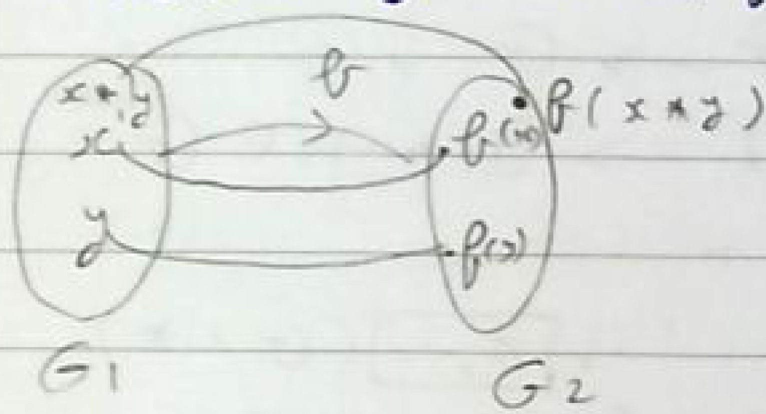
ليكن f تطبيق

زمرة زمرة

$$(G_1, *_1) \xrightarrow{f} (G_2, *_2)$$

$$f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y) \iff f \text{ تشاكل زمري}$$

من تشاكل شبه الزمرة



الحلقة: (أية حلقة واحدية)

ليكن $G \neq \emptyset$ نعرف عليها قانوني تشكيل داخلي $(\cdot, +)$

$$(G, +, \cdot)$$

قانوني تشكيل داخلي

G حلقة $\iff$

1) $(G,+)$ زمرة تبديلية حيادها 0

2) $(\cdot)$ تجميعي ($(G,\cdot)$ شبه زمرة)

$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)\ ;\ x, y, z \in G$

3) وجود حيادي الضرب نرمز له (1)

4) $(\cdot)$ توزيعي على $(+)$ أي:

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$$

أمثلة: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ، $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \cdot\right)\ ;\ n \neq 1$: $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \ldots, \overline{n-1}$

المنطقة التكاملية: هي حلقة تبديلية خالية من قواسم الصفر

مثال على قواسم الصفر: في الحلقة $(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ لأن $\bar{2}+\bar{2}=\bar{0}$

وبالتالي 2 قاسم للصفر

$(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ منطقة تكاملية $\Leftrightarrow$ إذا كان n عدد أولي

شروط الحقل : $(G, +)$ زمرة تبديلية و $(G^*, \cdot)$ زمرة تبديلية و (.) توزيعي على +

التشاكل الحلقي:

ليكن لدينا حلقتين: $(A, +, \cdot)$ و $(B, +, \cdot)$

نقول عن التطبيق:

$$f : A \to B$$

انه تشاكل حلقي $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & [1 \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) & [2 \\ f(1_A) = 1_B & [3 \end{cases}$$

الفضاءات الشعاعية على حقل $\mathbb{R}$:

لتكن $V \neq \emptyset$ نزودها بقانون تشكيل داخلي $(V, +, \cdot)$

$+$ داخلي : $V \times V \to V$

$$(x, y) \to x + y$$

$\cdot$ خارجي على V : $\mathbb{R} \times V \to V$

مجموعة مؤثرات $\mathbb{R}$

$$(r, v) \to r \cdot v$$

إذا $\mathbb{R} = V$ لا يوجد فرق بين الداخلي والخارجي

$(V, +, \cdot)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ إذا تحقق:

1] $(V, +)$ زمرة تبديلية

2] تحقق الخواص التالية:

أ] $1 \cdot v = v$

ب] $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$

ج] $\alpha (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

د] $\alpha (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) v$

مثال: $\mathbb{R}^n$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$

انتهت المراجعة

إن $(M, +, \cdot)$ إن M هو A ـ موديول

مجموعة مؤثرة حلقة A

إذا وفقط إذا تحقق:

1] $(M, +)$ زمرة تبديلية (مبادي بـ ٥)

2] يجب تحقق الخواص التالية:

أ] $1_A \cdot m = m$

ب] $\alpha \cdot (\beta \cdot m) = (\alpha \cdot \beta) \cdot m$

ج] $\alpha (m_1 + m_2) = \alpha \cdot m_1 + \alpha m_2$

د] $(\alpha + \beta) \cdot m = \alpha m + \beta m$

اعادة المثال [4] $C(N, A)$, $+$

يلزم يكون $f + g \in C(N, A)$ $\forall f, g \in C(N, A)$

قانون تشكيل داخلي $f + g : N \to A$

$x \to (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

• $\cdot : A \times C(N, A) \to C(N, A)$

$\forall\, a \in A$

$\forall\, f \in C(N, A)$

$a \cdot f : N \to A$

$x \to (a\cdot f)(x) = a \cdot f(x)$

إن $(C(N, A), +, \cdot)$ هو A - مودول

يجب أن نثبت أن: أ] $f + g \in C(N, A)$

ب] $a \cdot f \in C(N, A)$

أ] $x_1 = y_1 \overset{?}{\Rightarrow} (f+g)(x) \overset{?}{=} (f+g)(y)$

إن f تطبيق فيكون

$f(x) = f(y)$

و G تطبيق فيكون $g(x) = g(y)$

ومنه يكون $f(x) + g(x) = f(y) + g(y)$

اثبات المودول والقسمة

يجب نتأكد من قاعدة الربط والمنطلق ومستقره عند اثبات المودول

ب] إن $a \cdot f \in C(N, A)$ لأن

$x = y \Rightarrow (a \cdot f)(x) \overset{?}{=} (af)(y)$

إن $x = y$ ومنه كون f تطبيق فيكون $f(x) = f(y)$

نضرب بـ a ، $a \cdot f(x) = a \cdot f(y)$

$(af)(x) = (af)(y)$

مثال (5) : ليكن $f : A \to B$ تشاكل حلقي

إذن B هي A - مودول

الداخلي ما يضرب كليهما زمرة تبديلية بشملتها الخارجي

1] قانون التشكيل الداخلي هو نفسه القانون الأول المعرف على الحلقة B

(لأن $(B, +)$ زمرة تبديلية)

[2 $\cdot : A \times B \longrightarrow B$

$(a, b) \to a \cdot b = \underbrace{f(a) \cdot b}_{\in B}$ تكتب بما يضمن وفق التشكيل الداخلي

نقوم بالتكملة وطبيعة نؤكد أن B هي A مودول

مثال (6) : المودول على حقل هو نفسه مفهوم الفضاء الشعاعي

مثال (7) : $(A, +, \cdot)$ حلقة ولتكن I مثالي في A

($(I, +)$ زمرة تبديلية)

$\forall i \in I \ , \ \forall a \in A \ : a i \in I.$

إن I هو A ـ مودول

لأن :

$$\cdot : A \times I \to I$$
$$(a,i) \to a.i \in I$$

مثال 8 : لتكن $(M,+)$ زمرة تبديلية

ولنأخذ :

$$End(M) = \left\{ \begin{array}{l} f : M \to M \\ f \text{ تشاكل زمري} \end{array} \right.$$

$(End(M), +, \underbrace{o}_{\text{تركيب التوابع}})$ حلقة حيادها هو id_M وغير تبديلية

أن M هي $End(M)$ ـ مودول لأن :

$$\cdot : End(M) \times M \to M$$
$$(f, m) \to f(m)$$

تابعة وظيفية

مثال 9 : ليكن : $f : A \to B$

تعميم لـ (5) تشاكل حلقي ولنأخذ M مودول على B

عندها يمكن تزويد M بقانون تشكيل خارجي لتصبح M

هي مودول على A

كما يلي :

$$\cdot : A \times M \to M$$
$$(a,m) \to \underbrace{f(a)}_{B} . \underbrace{m}_{M}$$

تابعة وظيفية

مبرهنة : ليكن M هو A - موديول عندها

$$1]\ a \cdot 0_M = 0_M \quad ; a \in A$$

$$2]\ 0_A \cdot m = 0_M$$

$$3]\ (-a) \cdot m = a \cdot (-m) = -(a \cdot m)$$

الإثبات :

$$1]\ 0 + \cancel{a \cdot 0} = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + \cancel{a \cdot 0}$$

$$0 = a \cdot 0$$

$$2]\ 0 \cdot m = (0 + 0) \cdot m = 0 \cdot m + 0 \cdot m$$

$$0 = 0 \cdot m$$

$$3]\ 0 \cdot m = 0$$

$$(a + (-a)) \cdot m = 0$$

$$a \cdot m + (-a) \cdot m = 0$$

$$(-a) \cdot m = -(a \cdot m)$$

كذلك

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot (m + (-m)) = 0$$

$$a \cdot m + a(-m) = 0$$

$$-(a \cdot m) = a \cdot (-m)$$