الموضوع: المحاضرة 3 2015/10/21

(الموديولات الجزئية)

تعريف: ليكن M موديول على حلقة A ولنأخذ

$$\emptyset \neq N \subseteq M$$

عندها نقول عن N إنها موديول جزئي من M إذا

كان N بحد ذاته موديول على A

أي: 1) $(N, +)$ زمرة جزئية من M

2) $\forall \alpha \in A \ , \forall n \in N$

$$\alpha . n \in N$$

أي:

11) $\forall n_1, n_2 \in N : n_1 - n_2 \in N$ ← تعني زمرة جزئية

22) $\left.\begin{matrix} \forall \alpha \in A \\ \forall n \in N \end{matrix}\right\} : \alpha . n \in N$ ← تعني أن المجموعة N مغلقة بالنسبة إلى القانون لما

أي بعد دمج الشرطين (11) و (22)

$$\left.\begin{matrix} \forall \alpha, \beta \in A \\ \forall n_1, n_2 \in N \end{matrix}\right\} \alpha n_1 + \beta n_2 \in N$$

أمثلة: 1) الموديول الصفري

$O_M = \{o_M\}$ هو موديول جزئي من M

و M هي موديول جزئي من M

2) $(M, +)$ زمرة تبديلية هي ($\mathbb{Z}$ _ موديول)

إن أي زمرة جزئية M هي موديول جزئي من $(M, +, .)$

((بما أن كل زمرة جمعية تبديلية M هي موديول على حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

فإن كل زمرة جزئية من الزمرة M هي موديول جزئي من الموديول M (تعميم))

3] لتكن A حلقة ولتكن I مثالي في A

إن I هو مودول جزئي من A

(العمليات على المودولات الجزئية):

<u>التقاطع</u>: ليكن M مودول على حلقة A ولتكن

$\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات الجزئية من M

نعرفها $\cap M_i = \{x\in M : x\in M_i \ \ \forall i\in I\}$

إن $\cap M_i$ تشكل مودول جزئي من M

1] إثبات $\bigcap_{i\in I} M_i \neq \emptyset$

إثبات أنها ليست خالية $0_M\in M_i \quad \forall i\in I \Rightarrow 0_M\in \bigcap_{i\in I} M_i$

إثبات المودول الجزئي

2) ليكن $\alpha, \beta \in A$

$x, y \in \cap M_i$ عناصر كيفية

$x \in \bigcap_{i\in I} M_i \Rightarrow x\in M_i \ ; \forall i\in I$

$y \in \bigcap_{i\in I} M_i \Rightarrow y\in M_i \ , \forall i\in I$

ولكن M_i هو مودول جزئي من M (مهما تكن $i\in I$)

وبالتالي: $\alpha x + \beta y \in M_i$

وذلك مهما تكن $i\in I$

وهذا ما يبين أن $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i \in I} M_i$

المجموع (منتهي)

ليكن M مودول على حلقة A ولتكن $M_1, \dots, M_r$ مودولات جزئية من M

لنعرف المجموعة

$$M_1 + M_2 + \dots + M_r = \sum_{i=1}^{r} M_i = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i \; ; \; x_i \in M_i \right\}$$

$$M_1 + M_2 = \{ m_1 + m_2 \; ; \; m_1 \in M_1 \; ; \; m_2 \in M_2 \}$$

ان $\sum_{i=1}^{r} M_i$ مودول جزئي من M

الاثبات: $\sum_{i=1}^{r} M_i \neq \emptyset$ لأن

$$0_M = 0_{M_1} + \dots + 0_{M_r} \in \sum_{i=1}^{r} M_i$$

ليكن ~~...~~ $x, y \in \sum_{i=1}^{r} M_i$

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i \; ; \; x_i \in M_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{r} y_i \; ; \; y_i \in M_i$$

$$ax + by = a\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) + b\left(\sum_{i=1}^{r} y_i\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} (a x_i + b y_i)}_{\in M_i}$$

ومنه $\sum_{i=1}^{r} M_i \subseteq M_i$

تعميم: لتكن M مودول على حلقة A ولتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات الجزئية منها.

$$\sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{i\in I} x_i \quad \text{x_i كلها أصفار، عدا عدد منته منها و $x_i \in M_i$} \right\} \subset M$$

إن $\sum_{i\in I} M_i$ مودول جزئي من M وصيغته البنائية

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{t} x_i \;;\; \underset{\forall i\in I}{x_i \in M} \;;\; t \in \mathbb{N}^* \right\}$$

وصيغته

الموديول المولد بالمجموعة:

لتكن M مودول على حلقة A ولتكن S مجموعة جزئية من M نعرف $\langle S\rangle$ هو أصغر مودول جزئي من M والذي يحوي S أي هو تقاطع كل المودولات الجزئية من M التي تحوي S

$(G, \cdot)$

$S \subseteq G$

$\langle S\rangle = \cap G$

تركيب مقار

الموضوع:..................

/ /

$$\langle S\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } S=\emptyset \\ \{\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_t s_i \ : \ \alpha_i \in A \ ; \ s_i \in S,\ t\in \mathbb{N}^*\} \end{cases}$$

تمرين من الكتاب: لتكن M مودول على حلقة A ولتكن $M_1 ; M_2 ; M_3$ مودولات جزئية من M

حيث $M_3 \subseteq M_1$

اثبت أن: $M_1 \cap (M_2 + M_3) = (M_1 \cap M_2) + M_3$

الاثبات:

$$\boxed{x \in M_1 \cap (M_2 + M_3)}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \in M_1 \\ x \in M_2 + M_3 \end{cases} ,$$

ومنه $x \in M_1 \ ; \ x = m_2 + m_3$

حيث $m_3 \in M_3 \ ; \ m_2 \in M_2$

ومنه

$$x = m_2 + m_3$$

$$m_2 = \underbrace{x}_{\in M_1} - \underbrace{m_3}_{\in M_3 \subset M_1} \in M_1$$

إذاً $m_2 \in M_1$

ومنه $$\boxed{x = \underbrace{m_2}_{\in M_1 \cap M_2} + \underbrace{m_3}_{\in M_3} \in (M_1 \cap M_2) + M_3}$$

ومنه $M_1 \cap (M_2 + M_3) \subseteq (M_1 \cap M_2) + M_3$ (1)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

إثبات العكس:

$\boxed{x \in (M_1 \cap M_2) + M_3} \Rightarrow x = n + m_3$

حيث $n \in M_1 \cap M_2$

$m_3 \in M_3$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \underbrace{n}_{\in M_1} + \underbrace{m_3}_{\in M_3 \subset M_1} \in M_1 \\ \\ x = \underbrace{n}_{\in M_2} + \underbrace{m_3}_{\in M_3} \in M_2 + M_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x \in M_1 \cap (M_2 + M_3)}$$

ومنه 2) $(M_1 \cap M_2) + M_3 \subseteq M_1 \cap (M_2 + M_3)$

من 1 و 2 نستنتج أن العبارة صحيحة

المحاضرة الرابعة

التشاكلات المودولية: (morphisms)

تعريف: ليكن M و N مودولين على نفس الحلقة A

عندها نقول عن التطبيق: $f : M \to N$

إنه تشاكل مودولي إذا:

1) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

2) $f(\alpha \cdot m_1) = \alpha \cdot f(m_1)$

مهما يكن $m_1, m_2 \in M$ و $\alpha \in A$

تعريف: ليكن N و M مودولين على حلقة A

$Hom_A(M, N) = \{ f : M \to N \}$ تشاكل مودولي

مجموعة كل التشاكلات من M إلى N

نريد إثبات أن + قانون تشكيل داخلي و (.) قانون تشكيل خارجي