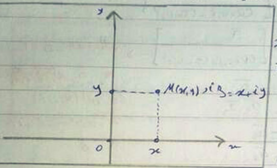
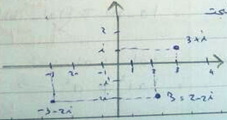
## ⊕ التمثيل الهندسي للعدد العقدي (النقطي)



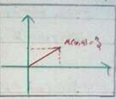

من المعروف وجود تقابل بين الثنائيات المرتبة من الأعداد الحقيقية وبين نقاط مستوٍ مزود بجملة محورين $xy$.
ملاحظة في الهامش
من غير الصحيح أن نقول عن M أنه العدد كذا، أو كذا وكذا لكن بسبب وجود هذا التقابل سمح لنا مجازاً قول هذا أو مثلاً أن نقول عن النقطة $x+iy$ هي العدد $z$ لأنه لا يجوز علمياً يجب أن نقول هذه النقطة التي تمثل (z) على محور الإحداثيات وانتبه بسبب وجود التقابل قولنا هذا

⟸ إنه يقابل كل عدد عقدي $z$ نقطة في المستوي $xoy$ والعكس صحيح
نسمي النقطة $M(x,y)$ بالنقطة الممثلة للعدد العقدي $z = x+iy$ في المستوي
أو نقول عنها صورة $z$ بالمستوي أو نقول إن $z$ ممثل بالمستوي بالنقطة M ونسمي المستوي $xoy$ الذي نمثل فيه كل الأعداد العقدية بالمستوي العقدي أو المستوي $z$ أو مستوي غاوص، كما يمكننا أن نرمز للنقطة M بالرمز $z$ ونسميها نقطة في المستوي العقدي.. نتيجة: بسبب هذا التقابل نسمي $z$ عدداً أيضاً

- نقاط $ox$: تمثل الأعداد الحقيقية البحتة لذلك نسمي المحور $ox$ بالمحور الحقيقي البحت ونقاط $oy$: تمثل الأعداد التخيلية البحتة لذلك نسمي المحور $oy$ بالمحور التخيلي البحت



⊕ التمثيل المتجهي (الشعاعي) للعدد العقدي:

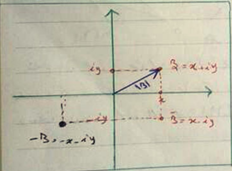



كل عدد عقدي يمثل شعاع وحيد والعكس صحيح لأن هناك تقابل بين مجموعة الأعداد العقدية وبين أشعة المستوي العقدي الذي بدايته كلها (O) ونهايته النقطة نفرعها، أي كل شعاع للعدد العقدي هو نفس البداية والنهاية فهو وحيد...

فإذا كانت $z=x+iy$ هي النقطة الممثلة للعدد العقدي في المستوي فإننا نقول عن الشعاع $\vec{OM}$ ممثل للعدد العقدي $z$ بالمستوي العقدي وإن مركبات الشعاع هي نفس مركبات النقطة. أي مركبات الشعاع هي $(x,y)$ أي كل عدد عقدي هو شعاعي

⊕ التفاسير الهندسية لبعض العمليات السابقة:

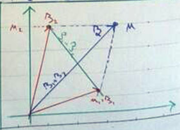
1- المرافق: المرافق للعدد العقدي $z=x+iy$ هو $\bar{z}=x-iy$ هندسياً هو نظير $z$ بالنسبة لـ $\vec{Ox}$




2- النظير: النظير هو $-z=-x-iy$ وهو نظير $z$ بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

3- الطويلة: طويلة $z$ هي $|z|$ وهي $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ وهي بعد $z$ عن المبدأ

4- مجموع عددين عقديين: مجموع $z_1+z_2$ $z$ نقطة في المستوي فهو شعاع. الشعاع $\vec{OM_1}$ الممثل لـ $z_1$ والشعاع $\vec{OM_2}$ الممثل بـ $z_2$ و $\vec{OM}$ هو الشعاع الممثل لـ $z=z_1+z_2$ أي




$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

حيث $\vec{OM}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ لأن مركبات كل شعاع هي إحداثيات النقطة المقابلة له أي

$$\vec{OM}=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$$

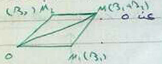
مجموع عددين هندسياً هو مجموع الشعاعين الممثلين لهذين العددين.

للتذكر: طريقة أخذ مجموعهما. حيث نأخذ من نهاية الشعاع الأول ونرسم شعاع مساوٍ للشعاع الثاني والخط الواصل من المبدأ إلى نهاية الشعاع المرسوم (القطر الرئيسي لمتوازي الأضلاع المنشأ على الأشعة).

بينما $Z_1 - Z_2$ هندسياً هو الشعاع المرسوم في القطر الثانوي لمتوازي الأضلاع المنشأ على الشعاعين $Z_1, Z_2$ الذي ~~[illegible]~~ بدايته نهاية الشعاع $Z_2$ ونهايته نهاية الشعاع $Z_1$.

5- اثبات صحة المتراجحة $|Z_1+Z_2| \leq |Z_1|+|Z_2|$ :

إن طويلة $Z_1$ هي بعد $Z_1$ عن $O$ ~~[illegible]~~ وطويلة $Z_1+Z_2$ هي بعد $Z_1+Z_2$ عن $O$.



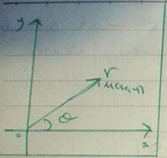

نأخذ المثلث $O\hat{M_1}M$ إن طويلة $OM_1$ هو طويلة $Z_1$ وطول $M_1M$ هو طويلة $Z_2$ وطويلة $OM$ هي طويلة $Z_1+Z_2=Z_3$

نعلم أن مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر أو يساوي طول الضلع الثالث

ملاحظة: "هنا يجب أن تكون أكبر تماماً لكن نأخذ الحالة التي يكون فيها النقاط على استقامة واحدة"

وسيتم اثبات صحة المتراجحة $|Z_1-Z_2| \geq |Z_1|-|Z_2|$

نأخذ المثلث $O\hat{M_2}M$ إن طويلة $OM_2$ هو طويلة $Z_2$ وإن $M_2M$ هو طويلة $Z_1$ وإن طويلة $M_2M_1$ هو طويلة $Z_1-Z_2$ ونعلم أن حاصل طرح طولي أي ضلعين في المثلث أصغر أو يساوي طول الضلع الثالثة




⊕ الشكل ~~الجبري~~ القطبي لعدد عقدي (المثلثي)

ليكن العدد العقدي $z = x+iy$ ولتكن النقطة M الممثلة لـ z في المستوي...

نلاحظ أن $|z| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2+y^2}$

نستطيع أيضاً أن نعطي النقطة احداثيات قطبية

وبالتالي الاحداثيات القطبية لـ M هي:

- الاحداثي القطبي الأول $r = |z|$
- الاحداثي القطبي الثاني $\theta$ وهو احد قياسات الزاوية بين الاتجاه الموجب لـ $\vec{Ox}$ والشعاع $\vec{OM}$ .. نحن أخذنا احد قياسات $\theta$ فقط لأن لـ $\theta$ عدد لانهائي من القياسات فإذا كانت $\theta_0$ احد هذه القياسات فإن $\theta_0 + 2\pi k \; \forall k \in \mathbb{Z}$ وهذه جميع قياسات لـ $\theta$ .. لا يكفي لنا استخدام الا قياس واحد لانه لو اخذنا كل القياسات فإنه كل قياس سيقابل النقطة M بعدد لانهائي من النقاط.

نرمز لجميع هذه ~~...~~ القياسات بالرمز $(\arg z)$ صغيرة

ويسمى زاوية أو عمدة $z$ أما القياس لـ $\theta$ الواقع بالمجال $]-\pi,\pi]$

يسمى القيمة (العين) الرئيسية لزاوية $z$ ويرمز له بـ $\operatorname{Arg} z$ كبيرة

ملاحظة: أي عدد عقدي سيقابله نقطة بالمستوي. وهذه النقطة سيقابلها قياس زاوية وحيدة.

⊕ العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية والاحداثيات القطبية

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = x+iy$

$= r\cos\theta + i r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

يسمى هذا الشكل بالشكل المثلثي (القطبي) لـ $z$ ويمكن كتابته اختصاراً

$z = [r,\theta]$

بالمناسبة هذا الرمز نستطيع وضعه بامتحان لكن يفضل ان نطلع العملية الرئيسية

ملاحظة.. بعض الكتب ترمز به

$$\text{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$$

~~[illegible]~~

$$\Rightarrow \boxed{z = r\,\text{cis}\,\theta}$$

$\cos\theta$ $i$ $\sin\theta$

انتهت المحاضرة