المحاضرة التاسعة تحليل عقدي (١)　　　　الاربعاء 7 / 10 / 2014

ملاحظة: ليس كل ما ينطبق على $\mathbb{R}$ ينطبق على $\mathbb{C}$ .. لكن $\mathbb{C}$ ايضاً خالي من القواسم الصفرية أي أن:

if : $z_1 \cdot z_2 = 0 \iff z_1 = 0$ or $z_2 = 0$

ملاحظة: القواسم الصفرية تم التعرف عليها في الجبر (٢) وهي معنية بأن إذا كان هناك حد يساوي الصفر لكن العناصر لا تساوي الصفر أي $a, b \neq 0$: $a \cdot b = 0$

هنا نقول عن a, b أنها قواسم صفرية.

أثبت أن الحقل $\mathbb{C}$ لا يمكن أن يكون حقلاً مرتباً كلياً

أولاً نريد أن نثبت أنه في الحقل المرتب كلياً وليكن F أن مربع كل عنصر أكبر أو يساوي الصفر:

$$\forall a \in F : a^2 = a \cdot a \geq 0$$

$$\forall a \in F : 0 \leq a \vee a \leq 0$$

if $0 \leq a$: $0 = 0 \cdot a \leq a \cdot a = a^2$

وهذا لأن هناك علاقة ترتيب وانسجام مع الضرب

else : $a \leq 0$: $a + (-a) \leq 0 + (-a) \Rightarrow 0 \leq -a$

وهذا لكون $-a \in F$ و F حقل وهناك انسجام مع الجمع

$$\Rightarrow 0 = 0(-a) \leq (-a)(-a) = a^2$$

وهذا يثبت أن مربع كل عنصر في الحقل المرتب كلياً أكبر او يساوي الصفر.

بما أن F حقل فإن $0_F \neq 1_F$ ولدينا ايضاً $1 \cdot 1 = 1^2 = 1 \geq 0$

$$\Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow -1 < 0$$

نفترض جدلاً أن $\mathbb{C}$ حقل مرتب كلياً و علاقة ترتيب كلي $(\leq)$ عندئذٍ

$(0,0) \leq (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) \Rightarrow (1,0) \leq (0,0)$

لكننا وجدنا أن $(0,0) \leq (1,0)$ وحسب الخاصية التخالفية فإن

$(1,0) = (0,0) \Rightarrow 1 = 0$ وهذا تناقض

وهذه الفرضية الجدلية خاطئة .. تم المطلوب

تنبيه: لا يحق لنا مقارنة الأعداد العقدية بالحقل $\mathbb{C}$ بعلاقة الترتيب ($\leq$) لأن $\mathbb{C}$ ليس حقل رتب كلياً بالأساس وليس مثل $\mathbb{R}$ أي ليس هناك علاقة أفضلية بين الأعداد العقدية ... لكن يمكننا ترتيب $\mathbb{C}$ كمجموعة ترتيباً كلياً وليس كحقل مثلاً:

بالتعريف

$(\alpha_1, \beta_1) \leq (\alpha_2, \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2 \vee (\alpha_1 = \alpha_2 \wedge (\beta_1 \leq \beta_2).)$

Example: $(1, 3) < (2, -5)$, $(-1, 2) \leq (-1, 3)$

ملاحظة: نمثل الأعداد العقدية بالمستوي.. فالعدد الذي أقرب لليسار هو الأصغر أما في حال تساوت لاكسات العددين فالعدد الأعلى هو الأكبر...

⊕ الشكل الجبري للعدد العقدي: $a = (\alpha, \beta) = \alpha + i\beta$

يسمى α بالقسم الحقيقي لـ a ~~ويسمى~~ يرمز له بـ $\operatorname{Re} a$

يسمى β بالقسم التخيلي لـ a يرمز له بـ $\operatorname{Im} a$

Example: $\operatorname{Re}(2 + \frac{1}{2} i) = 2$, $\operatorname{Im}(2 - 3i) = -3$.

ملاحظة: الإشارة الناقصة مرتبطة مع i بل مع العدد

نتكلم عن العمليات الجبرية للعدد العقدي بالشكل الديكارتي (الجبري):

⊕ التساوي: $a_1 = a_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Re} a_2 \wedge \operatorname{Im} a_1 = \operatorname{Im} a_2$

⊕ الجمع: $a_1 + a_2 = (\operatorname{Re} a_1 + \operatorname{Re} a_2, i(\operatorname{Im} a_1 + \operatorname{Im} a_2))$

⊕ الضرب: لإيجاد حاصل ضرب عددين عقديين نفك الأقواس كما في $\mathbb{R}$ ثم نستبدل كل i^2 بـ (-1) ثم نجمع الأعداد الغير مضروبة بـ i وتكون القسم الحقيقي ونجمع الأعداد المضروبة بـ i وتكون الجزء التخيلي

$(2, -3i)(-5, +6i) = \cancel{8} -10 + 12i + 15i - 18i^2 = 18 - 10 + 27i$
$= 8 + 27i$

$\bar{a} = \alpha - i\beta$ هو $a = \alpha + i\beta$ مرافق عدد عقدي للعدد

مثال: $\overline{(-1+2i)} = -1-2i \quad , \quad \overline{(1-2i)} = 1+2i$

ملاحظة: وإذا كان الجزء الحقيقي للعدد العقدي (α) معدوم يسمى العدد العقدي بعدد تخيلي بحت

○ وإذا كان الجزء التخيلي (β) معدوم يسمى العدد العقدي بعدد حقيقي بحت كذلك يسمى i بالواحدة العقدية ...

خواص المرافق ...

مرافق المرافق هو العدد العقدي نفسه : $\bar{\bar{a}} = a$

جمع المرافقات هو مرافق الجمع : $\bar{a}_1 \pm \bar{a}_2 = \overline{a_1 \pm a_2}$

جمع العدد مع مرافقه هو ضعفي القسم الحقيقي : $a + \bar{a} = 2\,Re\,a$

$a = \alpha + i\beta \ , \ \bar{a} = \alpha - i\beta \Rightarrow a + \bar{a} = \alpha + i\beta + \alpha - i\beta = 2\alpha$

طرح العدد العقدي إلى مرافقه هو ضعفي القسم التخيلي : $a - \bar{a} = 2i\,Im\,a$

$a = \alpha + i\beta, \ \bar{a} = \alpha - i\beta \ ; \ a - \bar{a} = \alpha + i\beta - \alpha + i\beta = 2i\beta$.

ضرب المرافقات هو مرافق الجداء : $\bar{a}_1 . \bar{a}_2 = \overline{a_1 . a_2}$

قسمة المرافقات هي مرافق القسمة : $\dfrac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} = \overline{\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)}$

ملاحظة: إن عملية قسمة الأعداد العقدية هي ضرب البسط بمقلوب المقام

$\dfrac{a_1}{a_2} = a_1 . a_2^{-1}$

بالتعريف   مقلوب

ملاحظة: لإيجاد المقلوب

$a \neq 0 \ ; \ a^{-1} = \dfrac{Re\,a}{(Re\,a)^2 + (Im\,a)^2} - i\dfrac{Im\,a}{(Re\,a^2) + (Im\,a)^2} = \dfrac{\bar{a}}{(Re\,a)^2 + (Im\,a)^2}$

انتبه ذكاء ... ومنه نستنتج من

$a . a^{-1} = 1 + 0i = 1$

$$\frac{a_1}{a_2} = a_1 \cdot a_2^{-1} = a_1 \left[\frac{Re\, a_2 - i\, Im\, a_2}{(Re\, a_2)^2 + (Im\, a_2)^2} \right]$$

$$= a_1 \left[\frac{\overline{a_2}}{(Re\, a_2)^2 + (Im\, a_2)^2} \right]$$ → هذا العدد حقيقي

$$= a_1 \cdot \frac{\overline{a_2}}{a_2 \cdot \overline{a_2}}$$

$$= \frac{a_1 \cdot \overline{a_2}}{a_2\, \overline{a_2}}$$

$a_1 \cdot \overline{a}_1$

$= (\alpha_1 i\beta)(\alpha_1 - i\beta)$

$= \alpha^2 - \alpha i\beta + \alpha i \beta + i^2\beta$

$= \alpha^2 + \beta$

ومنها يتبع أن الطريقة الميسرة لحساب قسمة عددين عقديين

وهي الضرب ~~بمقلوب~~ بمرافق المقام ---

Example: $\frac{1+i}{2+3i} = \frac{(1+i)(2-3i)}{\underbrace{(2+3i)(2-3i)}_{\text{الضرب}}} = \frac{5-i}{4+9} = \frac{5}{13} - \frac{i}{13}$

⊕ طويلة عدد عقدي هي العدد الحقيقي الغير سالب

$$|a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(Re\, a)^2 + (Im\, a)^2}$$

لا ترتيب في ℂ أبداً

خواصها:

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
- $a \cdot \overline{a} = |a|^2$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \leq |a| + |b|$ → هي $|a| + |-b|$ ولكن $|b| = |-b|$
- $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$ (طويلة الفرق مطلقة)
- $|a| = |-a| = |\overline{a}|$ في ℂ لا تساوي
- $|a|^2 \neq a^2$ → لكن في R تساوي