مبرهنة (الاطراد للمتناقص): إذا كانت $\{A_n\}_{n\ge1}$ متتالية متناقصة باطراد من الأحداث من f أي ($A_1 \supset A_2 \supset \dots$) وكان $A=\bigcap_{n\ge1} A_n$ فإن:

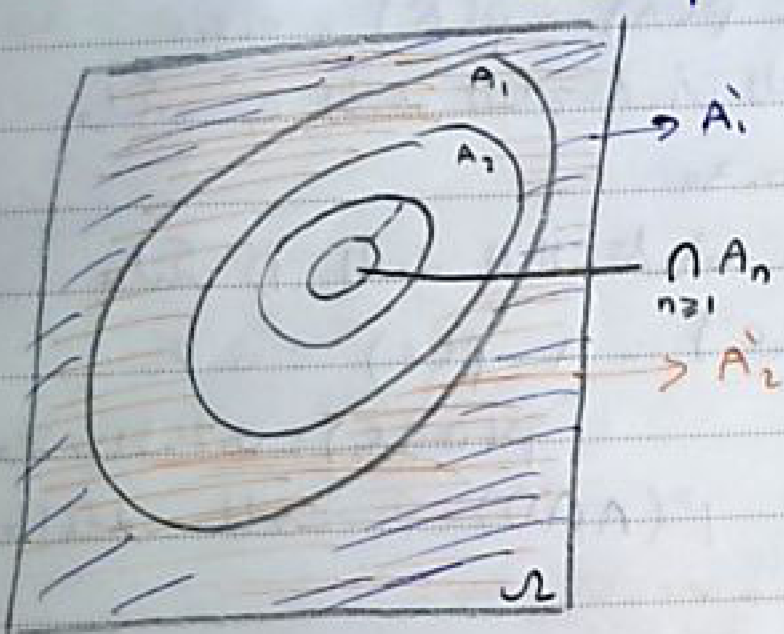
$$p(A)=p(\bigcap_{n\ge1}A_n)=\lim_{n\to+\infty}p(A_n)$$

خاصية الاستمرار من الأعلى

بما أن $A_1\supset A_2\supset\dots$ فإن $A_1'\subset A_2'\subset A_3'\subset\dots$ وحسب الاطراد متزايد فإن

$$\lim_{n\to+\infty} p(A_n') = p(\bigcup_{n\ge1}A_n') \quad \text{---} (*)$$

ولكن حسب قانون دومرغان فإن:



$$p(\bigcup_{n\ge1}A_n') = p(\bigcap_{n\ge1}A_n)' = \boxed{1-p(\bigcap_{n\ge1}A_n)} \quad (I)$$

$$p(A_n') = \boxed{1-p(A_n)} \quad \text{---}(II)$$

نعوض I و II في (*)

$$1-p(\bigcap_{n\ge1}A_n)=\lim_{n\to+\infty}[1-p(A_n)]$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}(p(A_n))$$

$$\Rightarrow p(\bigcap_{n\ge1}A_n)=\lim_{n\to\infty}(p(A_n))$$

خاصية الاستمرار للقياس الاحتمالي:

إذا كانت $\{A_n\}_{n\ge1}$ متتالية مطردة (متزايدة أو متناقصة باطراد) من الأحداث من f فإن، $p(\lim_{n\to+\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}(p(A_n))$ تتحقق هذه المساواة فقط في حالة الاستمرار

مبرهنة التكافؤ في النهايات في الاحتمالات

ليكن لدينا (Ω, f, p) فضاء احتمالي عندئذ الشروط التالية متكافئة:

1) قياس جمعي احتمالي، أي إذا كانت $\{A_n\}_{n\ge1}$ متتالية من الأحداث متنافية مثنى مثنى من f فإن: $p(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}p(A_n)$

2) إذا كانت $\{A_n\}_{n\ge1}$ متتالية متزايدة باطراد من f فإن $p(\bigcup_{n\ge1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}p(A_n)$

3) " " $\{A_n\}_{n\ge1}$ " متناقصة " " f " $p(\bigcap_{n\ge1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}p(A_n)$

4) " " $\{A_n\}_{n\ge1}$ " " " " f وكان $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$ فإن $p(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)=0$

البرهان غير مطلوب...

تمرين: مؤسسة تجارية تستخدم عمالاً من المدينة ومن خارجها فإذا كان 60% من العمال إناث و 30% من العمال من المدينة، وواحد من العمال من كل أربعة عمال هو من الذكور و من المدينة. عين نسبة الإناث العاملات من خارج المدينة في هذه المؤسسة؟

الحل: ليكن A الحدث الدال على أن العمال من الإناث:

$$\Rightarrow p(A) = 0.60$$

وليكن B الحدث الدال على أن العمال من الذكور:

$$\Rightarrow p(B) = 1 - p(A) = p(A') = 0.40$$

وليكن C الحدث الدال على أن العمال من المدينة:

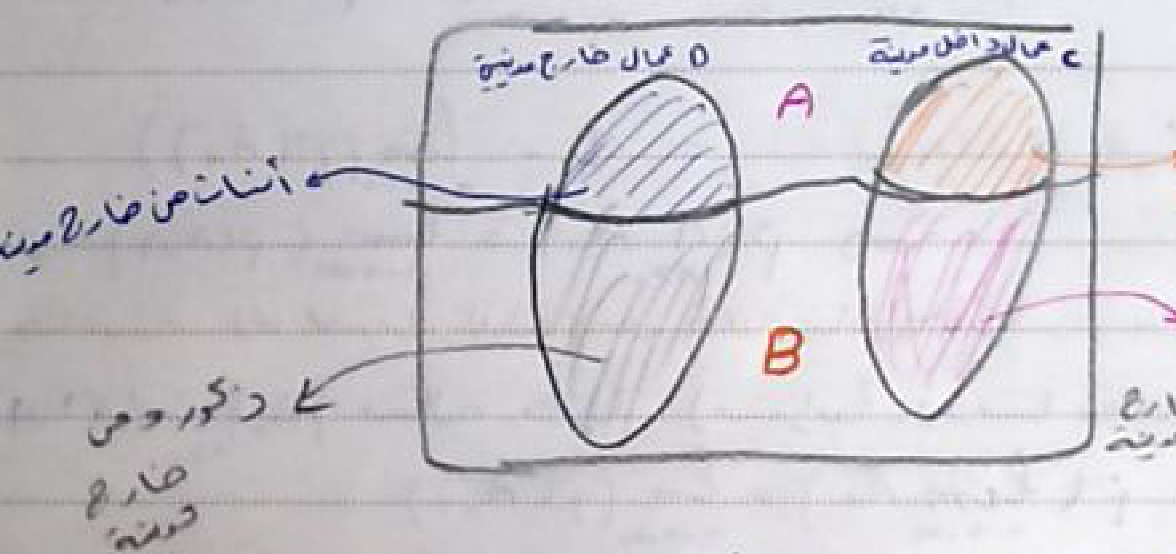
$$\Rightarrow p(C) = 0.30$$

وليكن D الحدث الدال على أن العمال من خارج المدينة:

$$\Rightarrow p(D) = p(C') = 1 - p(C) = 0.70$$

ولدينا: $p(B \cap C) = 0.25$

والمطلوب الحدث: $p(A \cap D) = ?$



الإناث هنا عبارة عن اجتماع مجموعتين إناث من مدينة وإناث خارج مدينة

$$A = (A \cap C) \cup (A \cap D)$$

بسبب تنافي $\Rightarrow p(A) = p(A \cap C) + p(A \cap D)$

$$\Rightarrow p(A \cap D) = p(A) - p(A \cap C) \quad \text{---}(*)$$

ولكن لدينا: $A \cap C = C \setminus (B \cap C)$

$$\Rightarrow p(A \cap C) = p(C) - p(B \cap C)$$

نعوض في *

$$\Rightarrow p(A \cap D) = p(A) - [p(C) - p(B \cap C)]$$

$$= 0.60 - 0.30 + 0.25$$

$$p(A \cap D) = 0.55$$

أي أن 55% من العمال من الإناث ومن خارج المدينة.

/ /

تمرين: سحبنا عينة عشوائية حجمها r من مجموعة عددها n. جد احتمال وجود عنصر معين في العينة إذا كان السحب: ١) بترتيب مع الإعادة.

٢) " بدون "

٣) إذا تم السحب مع الإعادة. جد احتمال ظهور كل عنصر مرة واحدة على الأكثر.

~~[illegible]~~

الحل: ① ليكن A الحدث المطلوب، فيكون A' حادثة عدم ظهور عنصر معين في العينة.

احتمال اختيار أي عنصر هو n ومع الإعادة يبقى n وعدد مرات التكرار r ومنه عدد $|\Omega|$

$$|\Omega| = n^r ,$$

بعد اختيارنا عنصر معين من عينة يبقى لدينا $n-1$ عنصر وعدد تكرار r ومنه.

$$|A'| = (n-1)^r \Rightarrow p(A') = \frac{(n-1)^r}{n^r}$$

$$\Rightarrow p(A) = 1 - p(A') \Rightarrow 1 - \frac{(n-1)^r}{n^r} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r$$

② ليكن B الحدث المطلوب، فيكون B' حادثة عدم ظهور عنصر معين في العينة حيث،

إن حادثة اختيار عنصر من عينة عددها n وبدون إعادة مع تكرار r مرة

$$|\Omega| \overset{\text{ترتيب}}{=} P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بعد اختيار عنصر من مجموعة عددها n فيبقى لدينا $(n-1)$ عنصر ومنه.

$$|B'| = P_r^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!}$$

$$\Rightarrow p(B') = \frac{|B'|}{|\Omega|} = \frac{n-r}{n}$$

$$\Rightarrow p(B) = 1 - p(B') = 1 - \frac{(n-r)}{n} = \frac{r}{n}$$

③ ليكن C الحدث المطلوب.

$$|\Omega| = n^r$$ لأن سحب مع الإعادة.

$$|C| = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow p(C) = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{n^r} = \frac{\cancel{n}(n-1)\cdots(n-r+1)}{\cancel{n}\times n\times n\times\cdots\times n}$$

$$p(C) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(٢ - \frac{(r-1)}{n}\right)$$

تمرين: سحبنا ورقتان بطريقة عشوائية من 10 ورقات مرقمة من 1 ـــ 10. أوجد احتمال أن يكون مجموعهما فردياً إذا تم السحب: ① الورقتين معاً.

② ورقة بعد أخرى بدون إعادة.

③ 〃 〃 〃 مع 〃 .

الحل: لنحصل على مجموع فردي يجب الحصول على عدد فردي وعدد زوجي.

ليكن A حدثاً يدل على الحصول على مجموعة فردي:

فيكون ①. $|\Omega| = C^{10}_{2} = 45$ سحب ورقتان.

$$|A| = C^{5}_{1} \cdot C^{5}_{1} = 5\times 5 = 25$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 0.56$$

② $|\Omega| = C^{10}_{1} \cdot C^{9}_{1} = 90$ سحب ورقتان بدون إعادة.

$$|A| = \underbrace{C^{5}_{1}}_{\text{فردي}} \cdot \underbrace{C^{5}_{1}}_{\text{زوجي}} + \underbrace{C^{5}_{1}}_{\text{زوجي}} \cdot \underbrace{C^{5}_{1}}_{\text{فردي}} = 5\times 5 + 5\times 5 = 50$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 0.56$$

③ $|\Omega| = C^{10}_{1} \cdot C^{10}_{1} = 10\times 10 = 100$ سحب ورقتان مع إعادة.

$$|A| = C^{5}_{1} \cdot C^{5}_{1} + C^{5}_{1} \cdot C^{5}_{1} = 5\times 5 + 5\times 5 = 50$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{50}{100} = 0.5$$