/ /

المحاضرة الثالثة:

مبرهنة -١-

إن حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية إن وجد وحيد.

البرهان:

لنفرض أن لمعادلة فريدهولم حلين هما

$$g_1(x)=F(x)+\int_a^b k(x,s)\cdot g_1(s)\,ds$$

$$g_2(x)=F(x)+\int_a^b k(x,s)\cdot g_2(s)\,ds$$

بالطرح ونفرض أن $g_1(x)-g_2(x)=g_0(x)$

$$\Rightarrow\quad g_0(x)=\lambda\int_a^b k(x,s)\cdot g_0(s)\,ds$$

نطبق متراجحة شفارتز على هذه المعادلة:

$$|g_0(x)|^2\leq|\lambda|^2\int_a^b|k(x,s)|^2ds\cdot\int_a^b|g_0(s)|^2ds$$

نكامل طرفي المتراجحة الأخيرة بالنسبة لـ x فنجد:

$$\int_a^b|g_0(x)|^2dx\leq|\lambda|^2\cdot B^2\cdot\int_a^b|g_0(s)|^2ds$$

حيث $B^2=\int_a^b\int_a^b |k(x,s)|^2\, dx\, ds$

$$\int_a^b |g_0(x)|^2\, dx \le |\lambda|^2 . B^2 . \int_a^b |g_0(s)|^2\, ds$$

لنفوض في الطرف الثاني «الأخير» كل s بـ x :

$$\int_a^b |g_0(x)|^2\, dx \le |\lambda|^2 . B^2 . \int_a^b |g_0(x)|^2\, dx$$

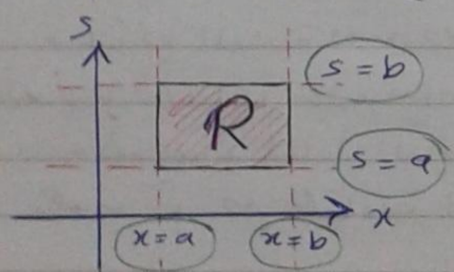
$$\Rightarrow (1-|\lambda|^2 . B^2) \int_a^b |g_0(x)|^2\, dx \le 0$$

وبما أن $|\lambda| . B < 1 \Leftarrow g_0(x)=0$ أياً كانت $x \in [a,b]$

وهذا يعني أن $g_1(x)=g_2(x)$

ملاحظة:

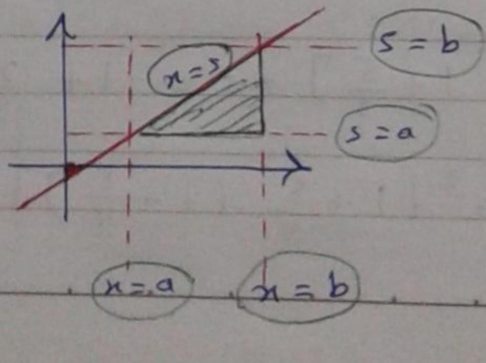
- رأينا أن معادلة فريدهولم التكاملية $g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,s).g(s)\, ds$
حيث $f(x)$ دالة كمولة تربيعاً على المجال $[a,b]$ وأن النواة $k(s,x)$
دالة كمولة تربيعاً على $\forall x,s \in [a,b]$
حيث $R=\{(x,s)\in \mathbb{R}^2 : a\le x\le b \wedge a\le s\le b\}$



وبما معادلة فولتيرا التي من الشكل:

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,s)\, g(s)\, ds$$

فان دالة فولتيرا دالة كمولة تربيعاً على $[a,b]$ والنواة $k(s,x)$ دالة مستمرة
على المثلث Δ وعلى محيطه والمحدد بالمتباينات $a\le x\le b$, $a\le s\le x$



- إذا أنه عكس رد معادلة فولترا إلى معادلة فريدهولم بتعريف نواة جديدة من الشكل:

$$\tilde{k}(x,s) = \begin{cases} k(x,s) : & a \le s \le x \\ 0 : & x < s < b \end{cases}$$

وبالتالي تصبح النواة الجديدة دالة مستمرة ومحدود والمحددة بالمتباينات ومنه كل ما يُطبق على معادلة فريدهولم عكسه تطبيقه على معادلة فولترا

مثال (1): بيّن أنّ الدالة $g(x)=1$ هي حلاً لمعادلة فولترا التالية:

$$g(x) + \int_0^x x\left(e^{xs}-1\right) g(s)\, ds = e^{x^2} - x^2$$

الحل:

نفرض الحل في معادلة فولترا:

$$1 + \int_0^x x\left(e^{xs}-1\right)(1)\, ds = e^{x^2} - x^2$$

نكامل مباشرةً بالنسبة لـ s:

$$1 + \left[x \left[\frac{1}{x} e^{xs} - s \right]_0^x \right] = e^{x^2} - x^2$$

$$\cancel{1} + e^{x^2} - x^2 - \cancel{1} = e^{x^2} - x^2 \Rightarrow$$ $g(x)=1$ تمثل حلاً للمعادلة

مثال (2): بيّن أن الدالة $g(x) = e^x\left(2x - \frac{2}{3}\right)$ حلاً للمعادلة التالية:

$$g(x) + 2\int_0^1 e^{x-s} \cdot g(s)\, ds = 2xe^x$$

الحل:

$$e^x\left(2x - \frac{2}{3}\right) + 2\int_0^1 e^x \cdot e^{-s}\left[e^s\left(2s - \frac{2}{3}\right)\right] ds = 2xe^x$$

$$2xe^x - \frac{2}{3}e^x + 2e^x \int_0^1 \left(2s - \frac{2}{3}\right) ds = 2xe^x$$

$$2xe^x - \frac{2}{3}e^x + 2e^x\left(\frac{1}{3}\right) = 2xe^x$$

$$2xe^x = 2xe^x \Rightarrow$$ $g(x)$ حلاً للمعادلة

مثال (3): تأكد من أن المعادلة التكاملية

$$g(x) = 1 + \int_0^1 x s^2 g(s)\, ds$$

تقبل حلاً ثم اوجد هذا الحل بطريقة التقريبات المتتالية.

الحل:

نلاحظ أن

$$f(x)=1 \ , \ \lambda = 1 \ , \ k(x,s) = x s^2$$

يكون للمعادلة حلاً عندما $|\lambda| < \frac{1}{B}$ لنحسب إذاً B

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2 s^4\, dx\, ds$$

إن هذا التكامل الثنائي موجود دوماً، إذ أن المنطقة R منطقة محدودة والنواة $k(x,s)$ دالة مستمرة لانها كثيرة حدود لذلك يمكن إيجاد التكاملة دفعة واحدة لان x ليس لها علاقة بـ (s)

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 x^2 s^4\, dx\, ds = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 s^4 ds = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{s^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad , \quad 1 < \frac{1}{\sqrt{15}}$$

وبالتالي المعادلة تقبل حلاً

• ولإيجاد الحل بالتقريب المتتالي نختار التقريب الأولي للحل $g_0(x) = 0$

ونعوض في المعادلة الثانية فنحصل على التقريب الثاني $g_1(x) = 1$

وهو يمثل حل للمعادلة التكاملية بشكل عام

$$\Rightarrow g_2(x) = 1 + \int_0^1 x s^2 (1)\, ds = 1 + x\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow g_2(x) = 1 + \frac{x}{3}$$

$$g_3(x) = 1 + \int_0^1 x s^2 \left[1 + \frac{s}{3}\right] ds = 1 + \frac{x}{3}\left[1 + \frac{1}{4}\right]$$

$$g_4(x) = 1 + \int_0^1 x s^2 \left[1 + \frac{s}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right)\right] ds$$

$$g_4(x) = 1 + \frac{x}{3}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right]$$

......

$$g_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{3}\underbrace{\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right]}$$

متسلسلة هندسية حدها الاول (1) واساسها $r = \frac{1}{4}$

وهي متقاربة كون $r < 1$ ومجموعها $S = \frac{1}{1-r} = \frac{4}{3}$

$$\lim_{n \to \infty} g_{n+1}(x) = g(x) = 1 + \frac{x}{3}\left[\frac{4}{3}\right] = \frac{4}{9}x + 1$$

وبالتالي فإن حل المعادلة التكاملية هو $g(x) = \frac{4}{9}x + 1$

- التقريب المتتالي في حل المعادلات التفاضلية:

يمكن حل المعادلات التفاضلية الاولى مثل (كوشي) $y' = f(x, y)$ والخاضع للشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$ حيث انه قد يكون من الصعب ايجاد الحل التحليلي لهذه المعادلة.

وقد درسنا حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرات والمتجانسة والتي ترد إلى متجانسة والتامة وعوامل التكميل والمعادلة الخطية والتي ترد إلى خطية.

وعلى سبيل المثال إذا اخذنا معادلة ريكارت فإن ايجاد الحل التحليلي لها يتطلب ايجاد حل خاص وهذا ليس سهلاً مما علينا إلى أن نلجأ إلى التقريب المتتالي حيث أن حل معادلة كوشي بالتقريب المتتالي يعطى:

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x F(x, y_{n-1})\,dx \; ; \; n = 1, 2, \dots$$

مثال:

اوجد بطريقة التقريب المتتالي حل المعادلة:

$$y' = y = f(x, y) \qquad y'(x) - y(x) = 0$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية من الشكل $y' - y = f(x, y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx$$

$$y(x) = y_0 + \int_{0}^{x} f(x,y)\,dx$$

الشكل التكراري:

$$y_n(x) = y_0 + \int_0^x y_{n-1}\,dx \quad : n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n=1 \Rightarrow y_1(x) = 1 + \int_0^x (1)\,dx = 1+x$$

$$\Rightarrow y_1(x) = 1+x$$

$$n=2 \Rightarrow y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+x)\,dx$$

$$y_2(x) = 1 + \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$\dots\dots$$

$$y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\Rightarrow y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

تمرين: $\boxed{1}$ - اوجد بالتقريب المتتالي حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' = y^2 - (2x+1)y + 4x^2 + 2x + 2$$

حيث $y(0)=0$ تقريب أولي -

$\boxed{2}$ - $y' = 0.133(x^2 + \sin 2x) + 0.872y$ حيث $y(0) = 0.1$ تقريب اولي

انتهت المحاضرة ...