الفضاء الاحتمالي : هو ثلاثية (Ω, F, P)

Ω فضاء العينة ، F جبر تام على Ω ، P قياس احتمالي

$$P : (\Omega, F) \to \bar{R}$$
$$A \to P(A)$$

أي أن P دالة حقيقية تلحق كل حدث A من F بعدد حقيقي يسمى احتمال (A) ونرمزه $P(A)$.

كي يتعين الفضاء الاحتمالي بشكل تام يجب تعريف قاعدة الربط $P(A)$

- التعاريف الأساسية للاحتمال :

1 - التعريف التقليدي للاحتمال : إذا كان Ω فضاء العينة $|\Omega| = n$ و A حدث متعلق بالتجربة $A \in F$. عندئذ :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} \quad ; \quad |A| = m$$

$|A|$ عدد امكانات وقوع الحدث A (عدد عناصر الحدث A)

$|\Omega|$ " " الكلية للتجربة (هنا $|\Omega| = n$)

- التعريف الاحصائي للاحتمال : نفرض أن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية إذا كررنا هذه التجربة (n مرة) (n كبيرة) وليكن A حدثاً متعلقاً بهذه التجربة بحيث يكون $n(A)$ عدد مرات تكرار وقوع الحدث A

أي الأفضل تكرار التجربة أكثر شيوعاً التي تحصل كل

فإن :

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n}}$$

٣- التعريف الهندسي للاحتمال : إذا كان A حدثاً متعلقاً بالتجربة فإننا نعرف احتمال الحدث A بالعلاقة :

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

حيث $\mu(A)$ قياس الحدث A و $\mu(\Omega)$ قياس الحدث الأكيد Ω حيث أن هذا القياس قد يكون طولاً أو مساحة أو حجماً

٤- التعريف البديهي للاحتمال : (تعريف كولموغوروف)

نسمي كل دالة حقيقية :

$$P : F \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad A \rightarrow P(A)$$

(حيث F جبر تام على Ω) دالة احتمال إذا حققت المسلمات التالية :

1) $\forall A \in F \quad : \quad P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $\forall A, B \in F \ , \ A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in F \ , \ i \neq j \ , \ A_i \cap A_j = \emptyset$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

/ /

نتائج: 1) $P(\emptyset) = 0$ ، البرهان:

$\emptyset \in F \xrightarrow{\text{حسب }(1)} P(\emptyset) \geq 0$

$\emptyset \cap \Omega = \emptyset \xrightarrow{\text{حسب }(3)} P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$

$\xrightarrow{\text{حسب }2} P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega) \Rightarrow 1 = P(\emptyset) + \cancel{1}$

$\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2) إذا كان $A \in F$ فإن $A' \in F$ ، ويكون $P(A') = 1 - P(A)$

البرهان:

$$\left.\begin{aligned} A \cap A' &= \emptyset \\ A \cup A' &= \Omega \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(3)} P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$\Rightarrow P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A')$

$\Rightarrow \boxed{P(A') = 1 - P(A)}$

3] إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تشكل تجزئة لـ Ω فإن

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

البرهان: بما أن $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ تجزئة لـ Ω فإن:

$i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

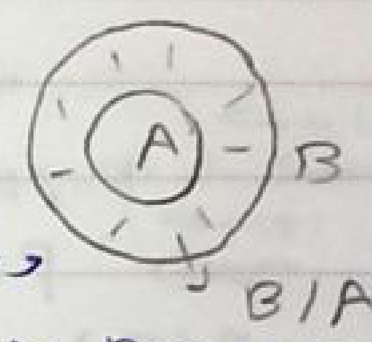
$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) = 1 \xrightarrow{\text{حسب }3} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

4) إذا كان A و B حدثين من F وكان $A \subseteq B$ فإن

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

وإن $P(A) \leq P(B)$

البرهان : $B = A \cup (B/A)$



حيث (A) و (B/A) حدثان متنافيان

وبالتالي :

$$P(B) = P(A) + P(B/A) \Rightarrow P(B/A) = P(B) - P(A)$$

وبما أن الاحتمال موجب فإن :

$$P(B/A) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) \geq P(A)}$$

5) من أجل أي حدث $A \in F$ فإن $0 \leq P(A) \leq 1$

البرهان $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$

وحسب النتيجة (4) فإن

$$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

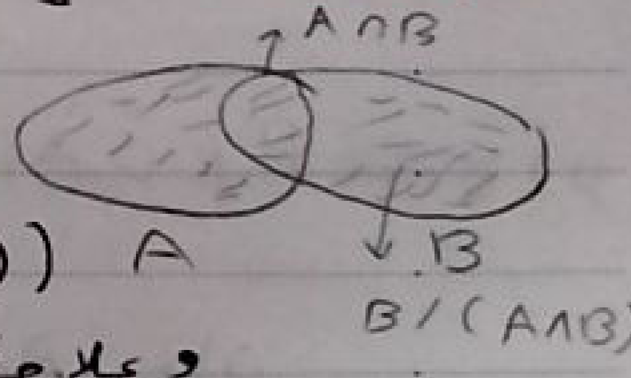
$$\Rightarrow \boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

ملاحظة: من أجل أي حدثين A و B من F فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

البرهان: يمكننا كتابة $A \cup B$ بالشكل:

$$A \cup B = A \cup [B/(A \cap B)]$$



والحدثان A و $B/(A \cap B)$ متنافيان وبالتالي

$$* \; P(A \cup B) = P(A) + P(B/(A \cap B))$$

وبملاحظة أن: $A \cap B \subseteq B$ فحسب النتيجة (4)

$$P(B/(A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

نعوض في * نجد

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مبرهنة: من أجل أي ثلاثة أحداث A و B و C من F يكون:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

البرهان: حسب المبرهنة السابقة يمكن ان نكتب:

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B\cup C)-\underbrace{P(A\cap(B\cup C))}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$$

$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-[P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)]$$

$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

مثال: نفرض أن A و B حدثان متنافيان و أن: $P(A)=0,30$ ، $P(B)=0,60$

أوجد كلاً من $P(A')$ و $P(B')$ و $P(A\cup B)$ و $P(A\cap B)$

و $P(A\cup B')$ و $P(A'\cap B')$.

الحل:

$$P(A') = 1-P(A) = 1-0,30 = 0.70$$

$$P(B') = 1-P(B) = 1-0.60 = 0.40$$

$$P(A\cup B) \overset{\text{متنافيان}}{=} P(A)+P(B) = 0,30+0.60 = 0.90$$

$$P(A\cap B) \overset{A,B\ \text{متنافيان}}{=} P(\emptyset) = 0$$

$A\cup B' \Rightarrow$

لدينا $A\cap B=\emptyset$ وبالتالي $B\subset A'$

$/ \quad /$

$\Rightarrow B \cap A' = B \Rightarrow P(A \cup B') \overset{\text{دومورغان}}{=} P(A' \cap B)'$

$= 1 - P(A' \cap B) = 1 - P(B) = 1 - 0.60$

$= 0.40$

طريقة ثانية: $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

$= P(A) + P(B') - \underbrace{P(A)}_{\text{لأ}}$

بما أن $A \cap B = \emptyset$ فإن $A \cap B' = A$

$\Rightarrow P(A \cup B') = P(A) + [1 - P(B)] - P(A)$

$= 1 - P(B) = 0.40$

طريقة ثالثة: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B' = B'$

$\Rightarrow P(A \cup B') = P(B') = 1 - P(B) = 0.40.$

$P(A' \cap B') \overset{\text{دومورغان}}{=} P(A \cup B)'$

$= 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.90$

$= 0.10.$