د. هدى   م.٢   2015 / 10 / 7

الإحداثيات المعممة لجسم صلب: نسمي الوسطاء المستقلة التي تعين بشكل وحيد وكافي موضع الجسم بالنسبة لفراغ ثابت بالإحداثيات المعممة لهذا الجسم ونرمز لها بـ q_i أي أن عدد الوسطاء المعممة يساوي عدد درجات حرية الجسم. فمثلاً الجسم صلب طليق له 6 درجة حرية أي أن عدد وسطائه المعممة 6 أي $q_i \; ; \; i = 1, \ldots, 6$

أما في المستوي تكون عدد وسطاء معممة هي 2، $q_1 = x \; , \; q_2 = y$

،، ،، الفراغ ،، ،، ،، هي 3، $q_1 = x \; , \; q_2 = y \; , \; q_3 = z$

،، ،، ،، لكن جملة إحداثيات كروية تكون عدد وسطائها المعممة هي: $q_1 = r \; , \; q_2 = \theta \; , \; q_3 = \varphi$

معادلات حركة مجموعة مادية:

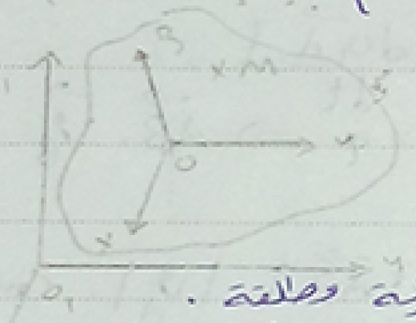
هي العلاقات الزمنية التي تربط الإحداثيات المعممة لهذه المجموعة بالزمن.

* أكثر حد لعدد معادلات هو 6 وإذا قيدت الحركة تقل عدد معادلات *

* تكون عدد معادلات الحركة تساوي عدد درجات حرية المجموعة ونكتب معادلات الحركة كما يلي: $q_i = q_i(t) \; ; \; i = 1, \ldots, n$

تعين موضع الجسم الصلب تحليلياً:

لتعين موضع جسم صلب تحليلياً نختار جملة إحداثية ثابتة ولتكن $o_1 x_1 y_1 z_1$ ونختار أيضاً جملة محاور إحداثية متحركة (متماسكة) مع الجسم



ولتكن $oxyz$. لقد درسنا سابقاً في ميكانيك 1. تكون حركة نقطة M ضمن جملة $oxyz$ حركة نسبية أما حركة M بالنسبة لجملة $o_1 x_1 y_1 z_1$ تكون حركة جرية أما حركة M بغض نظر عن حركتها ضمن $oxyz$ وذلك بالنسبة $o_1 x_1 y_1 z_1$ تكون حركة مطلقة.

* إذا أردنا معرفة موضع M بالنسبة لجملة ثابتة فإنه: $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$

ذلك أياً كانت $M \in S$ ولتكن $M(x, y, z)$ وهي ثوابت حيث أن M تتعين في جملة $oxyz$ بالشكل $\overrightarrow{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ أي أن x تقع على $\vec{i}$ و y تقع على $\vec{j}$ و z يقع على $\vec{k}$

وبالتالي فإن أشعة الواحدة $\vec{k}$، $\vec{j}$، $\vec{i}$ ~~...~~ متغيرات بالنسبة لجملة ~~...~~ (الثابتة) $o_1 x_1 y_1 z_1$.

ولنفرض أن $\vec{i}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ، $\vec{j}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ، $\vec{k}(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ وأيضاً النقطة o هي مبدأ جملة متحركة للمجموعة متماسكة متغيرة بالنسبة لجملة ثابتة $o(x_0, y_0, z_0)$. لدينا: $\overrightarrow{o_1M} = \overrightarrow{o_1o} + \overrightarrow{oM}$

$$= (x_0, y_0, z_0) + x(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) + y(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) + z(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

بالإسقاط على جملة محاور:

$$X_1 = x_0 + x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\alpha_3$$

$$Y_1 = y_0 + x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3$$

$$Z_1 = z_0 + x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3$$

لكن لدينا 12 وسطاء غير مستقلة وهي مركبات كل من o ، $\vec{k}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{i}$ مرتبطة بـ 6 علاقات وهي

$|\vec{i}|^2 = 1,\ |\vec{j}|^2 = 1,\ |\vec{k}|^2 = 1 \qquad \vec{i}.\vec{j} = 0 \qquad \vec{i}.\vec{k} = 0 \qquad \vec{j}.\vec{k} = 0$

بإذا عدد وسطاء المستقلة التي تعين موضع الجسم الصلب الطليق تساوي ($12 - 6 = 6$)

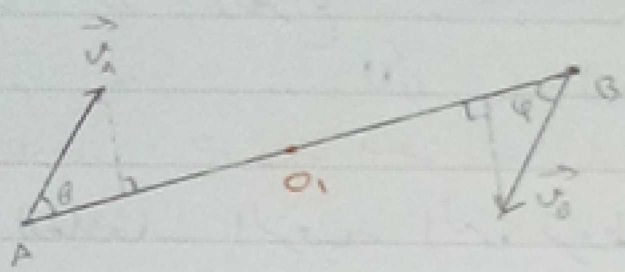
النظرية الأساسية لحركة الجسم الصلب: الشرط اللازم والكافي كي تشكل مجموعة مادية مجموعة متماسكة (جسم صلب) هو أن يتساوى مسقطا سرعتي نقطتين من هذا الجسم على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين. ثم إثبات أن مسقط سرعة A ولتكن v_A على AB يساوي مسقط سرعة B ولتكن v_B على AB.

البرهان:

$\Leftarrow$ لزوم شرط

$$\forall\ A, B \in S \Rightarrow |\vec{AB}| = C$$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB})^2 = C^2$$



بالاشتقاق:

$$\Leftrightarrow 2(\vec{AB}) . \frac{d(\vec{AB})}{dt} = 0 \quad \ldots (*)$$

لتكن O_1 تنتمي للفراغ الثابت.

$$\vec{AB} = \vec{AO_1} + \vec{O_1B}$$
$$= -\vec{O_1A} + \vec{O_1B}$$

وبالتالي بالاشتقاق والعودة لـ $*$

$$\Leftrightarrow (\vec{AB}) . \left[\frac{d}{dt} (\vec{O_1B} - \vec{O_1A}) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} . \left[\frac{d\vec{O_1B}}{dt} - \frac{d\vec{O_1A}}{dt} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB}(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = 0 \Rightarrow \vec{AB}.\vec{v}_B - \vec{AB}.\vec{v}_A = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB}| . |\vec{v}_B| . \cos\varphi = |\vec{AB}| . |\vec{v}_A| . \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow |\vec{v}_B| . \cos\varphi = |\vec{v}_A| . \cos\theta$$

مسقط سرعة نقطة B على مستقيم AB $\quad \text{proj}_{AB}\, \vec{v}(B) = \text{proj}_{AB}\, v(\vec{A})$

$\Rightarrow$ كفاية شرط تثبت بسياقات مماثلة إلى الأعلى. مسألة فرعية عرضين (مسألة)

نتيجة: إن معرفة سرع ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة لجسم صلب تكفي لتعيين سرعة أي نقطة من هذا الجسم لا تقع على استقامة واحدة مع أي نقطتين من نقاط ثلاثة.

إعداد : ريم الرحبي

/ /

مثال: لتكن A ، B ، C ثلاث نقاط من جسم صلب يتحرك بحيث يكون مواضع وسرع هذه النقاط وذلك في لحظة ما t .

$A(0,0,0)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,1,1)$

$\vec{v}_A(2,1,-3)$ و $\vec{v}_B(0,3,-1)$ و $\vec{v}_C(-1,2,-1)$

عين متجهات سرع النقط التالية: $M_1(1,2,0)$, $M_2(1,0,-1)$

الحل:

نفرض سرعة M_1 وهي: $\vec{v}_{M_1} = (a,b,c)$

انطلاقاً من العلاقة:

$$\vec{AM_1}\cdot\vec{v}_A = \vec{AM_1}\cdot\vec{v}_{M_1}$$

$$(1,2,0)(2,1,-3) = (1,2,0)(a,b,c)$$

$$4 = a+2b \quad \text{—(1)}$$

$$\vec{BM_1}\cdot\vec{v}_B = \vec{BM_1}\cdot\vec{v}_{M_1}$$

$$(0,1,0)(0,3,-1) = (0,1,0)\cdot(a,b,c)$$

$$b = 3 \quad \text{--(2)}$$

$$\vec{CM_1}\cdot\vec{v}_C = \vec{CM_1}\cdot\vec{v}_{M}$$

$$(0,1,-1)(-1,2,-1) = (0,1,-1)(a,b,c)$$

$$3 = b-c \quad \text{—(3)}$$

ومنه من 1 و 2 و 3 ... $a=-2$, $b=3$, $c=0$

$$\Rightarrow \vec{v}_{M_1}(-2,3,0)$$

لإثبات أن مجموعة من نقاط تنتمي لمجموعة متماسكة ندرس علاقة بين نقطتين إذا تحققت مساواة تكون نقطتين تنتمي لمجموعة