التحليل العقدي (1) - المحاضرة الأولى

الاثنين : 5 / 10 / 2015

قبل البداية بالمقرر نبه الدكتور الى ان معظم الطلاب تفتقد الى التدقيق في كتاباتهم الامتحانية فمثلاً معظم الطلاب تخلط بين هاذين التعريفين

○ الدالة المحدودة :

. $\exists M > 0 : |f(x)| < M \; ; \forall x \in A$

. $\forall x \in A \; ; \exists M : |f(x)| < M$

التعريف الاول صحيح لانه يوجد M وحيدة بينما التعريف الثاني يوجد M لكل x وبالتالي M متعلقة بـ x وهي غير وحيدة وبهذا التعريف خاطئ

الفصل الأول: مجموعة الأعداد العقدية

العدد العقدي : نسمي عدداً عقدياً هو كل ثنائية مرتبة من الاعداد الحقيقية

أي أن . $\mathbb{C} = \{(\alpha, \beta) \; ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

Example : $(0,0), (1,2), (2,1), (\frac{1}{2}, -3) \ldots \in \mathbb{C}$

ملاحظة. كلمة مرتبة تعني أن ترتيب عناصر الثنائية مهم مثلاً $(1,2)$ ليست نفسها $(2,1)$ أي عند التبديل بين مسقطين نحصل على عدد جديد .

العمليات الجبرية في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$:

○ التساوي في $\mathbb{C}$:

$$(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \; , \; \beta_1 = \beta_2$$

○ الجمع في $\mathbb{C}$:

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C} \; ; \; (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2).$$

وهذا يوضح أن عملية الجمع داخلية لأن "ثنائية + ثنائية = ثنائية"

وإن الزمرة $(\mathbb{C}, +)$ هي زمرة تبديلية والحيادي هو $(0,0)$ والنظير $(-\alpha, -\beta)$

و هناك للتوضيح عادة لا نضع أي رمز للضرب

○ الضرب بعدد حقيقي:

$(\alpha,\beta)\in\mathbb{C},\ \lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \lambda \overset{\textcolor{red}{1}}{*} (\alpha,\beta)=(\lambda\alpha,\lambda\beta)$

إن هذه العملية خارجية لأن العنصر الأول ليس من $\mathbb{C}$.

وإن $(\mathbb{C},+,\times)$ فضاء متجهي بعده 2 وعناصر قاعدته $\{(1,0),(0,1)\}$

○ الضرب في $\mathbb{C}$:

$(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)\in\mathbb{C}$,

$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\ ,\ \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)$

وإن العملية السابقة داخلية و $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ تجميعية تبديلية والحيادي

هو $(1,0)$. أوجد النظير لـ (α,β) "نضربه بالحيادي ونستنتج"

ثم اثبت إن $(\mathbb{C},+,\cdot)$ حقل

ملاحظة:

مما سبق نستنتج إن مجموعة الأعداد العقدية هي فضاء وحقل أيضاً.

• إن $\mathbb{R}$ مجموعة مرتبة كلياً لأن كل عنصرين منها يحققان العملية $(\leq)$

لكن اذا قلنا إن $\mathbb{R}$ حقل فليس بالضرورة إذا كانت كمجموعة مرتبة كلياً

تصبح كحقل مرتب كلياً هناك شرط وهو الانسجام والانسجام هو

إذا أضفنا عدد لطرفي المتراجحة فلن يتغير المتراجحة أو ضربت بعدد ايضاً

لن يغير من صفة المتراجحة وهذا يبين إن $\mathbb{R}$ حقل مرتب كلياً.

اثبت إن $\mathbb{C}$ ليس حقل مرتب كلياً..

ملاحظة: أي حقل مرتب كلياً فيه أي عدد مربعه موجب

اذا لاثبات إن $\mathbb{C}$ ليس حقل مرتب كلياً نفرض العكس....

٥. الشكل الجبري (الديكارتي) للعدد العقدي:

$$T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\alpha \longmapsto (\alpha,0) = T(\alpha)$$

هذا تطبيق متباين وغامر (تقابل) وهو تشاكل لأنه يحافظ على العمليات في الحقل هذا يعني أن $\alpha = (\alpha,0)$ وهذا يعني إنه يمكننا اعتبار أن $\mathbb{R}$ جزء من $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(\alpha,\beta) &= (\alpha,0) + (0,\beta) \\
&= \alpha(1,0) + (\beta,0)(0,1) \\
&= \alpha(1) + \beta i \qquad ; i = (0,1) \\
&= \alpha + i\beta
\end{aligned}$$

وهذا الشكل الجبري للعدد العقدي وهو احدى اشكال العدد العقدي .. ولاثبات أن $i^2 = -1$

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1$$

وهو المطلوب اثباته