رياضيات / سنة ٢ / اللغة الانكليزية / القسم الأول /

Sequences. Limits of numerical sequences. Some remarkable limits

Numerical sequences. General term of a sequence.
General term formula. Limit of numerical sequence.
Convergent sequence. Divergent sequence. Bounded sequence.
Monotone sequence. Weierstrass's theorem.
Basic properties of limits. Some remarkable limits.

Sequences. Consider the series of natural numbers: 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, ... If to change each natural number n in this series by some number u_n, following to some law, we'll receive a new series of numbers:

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-1}, u_n, \ldots$, marked shortly as $\{ u_n \}$

and called a *numerical sequence*.

A value u_n is called a *general term* of a sequence. Usually a numerical sequence is given by some formula $u_n = f(n)$, permitting to find any term of the sequence by its number n; this formula is called a general term formula. Note, that it is not always possible to give the numerical sequence by a general term formula; sometimes a sequence is given by description of its terms (see below the last example).

Examples of numerical sequences:

1, 2, 3, 4, 5, ... - a series of natural numbers ;

2, 4, 6, 8, 10, ... - a series of even numbers;

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ... - a numerical sequence of approximate, defined more precisely values of $\sqrt{2}$.

For the last sequence it is impossible to give a general term formula, nevertheless this sequence is described completely.

Limit of numerical sequence. Consider a numerical sequence, a general term of which approaches to some number a at increasing an ordinal number n. In this case we say, that the numerical sequence has a *limit*. This notation has a more strict definition: *A number a is called a limit of a numerical sequence* $\{ u_n \}$:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a,$$

if and only if for any $\varepsilon > 0$ *one can find such a number* $N = N(\varepsilon)$, *depending on* ε, *that* $|u_n - a| < \varepsilon$ *at* $n > N$.

This definition means, that a is a *limit* of a numerical sequence, if its general term approaches unrestrictedly to a at increasing n. Geometrically it means, that for any $\varepsilon > 0$ it's possible to find such a number N, that beginning from $n > N$ *all* terms of the sequence are placed within an interval ($a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$). A sequence, having a limit, is called *convergent*; otherwise - a *divergent* sequence. A sequence is *bounded*, if such a number M exists that $| u_n | \le M$ for all n. Increasing and decreasing sequences are called *monotone* sequences.

Weierstrass's theorem. Each monotone and bounded sequence has a limit.

كل متتالية متزايدة ومحدودة لها نهاية.

Basic properties of limits. The below mentioned properties of limits are valid not only for numerical sequences, but also for functions.

هذا التعريف يعني أن a نهاية المتتالية العددية إذا كان الحد العام ~~[illegible]~~ بلا قيود من a مع تزايد n .
هندسياً يعني أنه أياً كان ε>0 من الممكن إيجاد مثل العدد N ذلك ابتداءً من حد معين n>N كل حدود متتالية
تقع ضمن المجال (a-ε, a+ε)، متتالية التي لها نهاية تكون متقاربة وإلا تكون متباعدة، متتالية المحدودة، إذا كان
العدد M موجود بحيث $|u_n| \le M$ من أجل كل n . إن تزايد أو تناقص متتالية يدل على اطراد متتالية .

متقاربتان متتاليات

If $\{u_n\}$ and $\{v_n\}$ – two convergent sequences, then:

1 $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. (c is a number);

2 $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \pm v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} v_n$;

3 $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} v_n$;

4 $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n / v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n / \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, if $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \neq 0$;

5 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, if $u_n \leq v_n$.

If terms of sequences $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ satisfy the inequalities $u_n \leq v_n \leq w_n$ and $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$, then $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$.

تحقق المتراجحة

بعض بارزة نهايات

Some remarkable limits.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \ (e - \text{an irrational number} \approx 2.7183\ldots);$$

أصم عدد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 , \text{ here } a > 0 ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 , \text{ here } a > 0 ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1 ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan 1/n}{1/n} = 1 .$$

المتتاليات - نهاية المتتالية العددية - بعض نهايات شهيرة
المتتاليات العددية. الحد العام لمتتالية.
صيغة الحد العام. نهاية المتتالية العددية
المتتالية متقاربة. متتالية متباعدة. متتالية محدودة
متتالية مطردة. نظرية ويرستراس.
بعض خواص أساسية للنهايات. بعض نهايات شهيرة.

المتتاليات: نعتبر سلسلة من الأعداد الطبيعية $n, \ldots, 1$
إذا بدلنا كل عدد طبيعي n في هذه سلسلة بعدد ما U_n
تابعة لقانون ما سنحصل على سلسلة من الأعداد:

$U_n, \ldots, U_1$ يرمز لها اختصارا ب $\{U_n\}$ وتدعى بالمتتالية العددية.

القيمة U_n يدعى بالحد العام للمتتالية. بشكل عام المتتالية العددية تعطى بالصيغة $U_n = f(n)$ تسمح لنا بالعثور على أي حد من المتسلسلة رقمه n وتدعى هذه الصيغة بصيغة الحد العام.
لاحظ إنه ليس من الممكن دائماً إعطاء المتتالية العددية بالصيغة العامة وفي بعض الأحيان المتتالية تعطى بوصف حدودها (انظر الأسفل الأمثلة اللاحقة).

مثال عن المتتاليات العددية:
متتالية الأعداد الطبيعية $1, 2, \ldots$

متتالية الأعداد الزوجية ـــ ، 4 ، 2

التسلسل للعدد التقريبي المعرف بشكل أكثر ـــ ، 1.41 ، 1.4
دقة لقيم $\sqrt{2}$.

من أجل المتتالية السابقة من المستحيل أن تعطي صيغة عامة
إلا إذا كانت المتتالية وصفنا بشكل تام.

نهاية المتتالية العددية : هو اقتراب الحد العام للمتتالية العددية
من عدد ما a مع زيادة في العدد طبيعي n في هذه الحالة نقول
أن المتتالية العددية لها نهاية.
هذا الرمز له تعريف أكثر دقة : العدد a يدعى نهاية متتالية
العددية $\{u_n\}$ ، $\lim_{n \to \infty} u_n = a$

إذا وفقط إذا أياً كان $\varepsilon > 0$ يمكننا إيجاد عدد مثل $N = N(\varepsilon)$ متعلق
بـ ε بحيث أن $|u_n - a| < \varepsilon$ عند $n > N$.
هذا التعريف يعني أن a نهاية متتالية العددية إذا كان الحد
العام يقترب بلا حدود من a مع تزايد n. هندسياً يعني وأياً كان
$\varepsilon > 0$ من الممكن إيجاد عدد مثل N ذلك ابتداءً من صحيح $n > N$
وكل حدود متتالية تقع ضمن المجال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
المتتالية التي تملك نهاية متقاربة وإلا متتالية متباعدة.
متتالية محدودة. إذا وجد عدد مثل M بحيث $|u_n| \le M$ من أجل كل

زيادة ونقصان متتالية تدعى متتالية مطردة.
نظرية ويرستراس: كل متتالية مطردة (متزايدة) ومحدودة لها نهاية.
خصائص أساسية للنهايات. خصائص النهاية المذكورة أدناه
ليست فقط صالحة للمتتاليات العددية بل أيضاً للدوال.
إذا $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ متتاليتان متقاربتين فإن:

1 ✓ 3 ✓ 5 ✓

2 ✓ 4 ✓

إذا وجدت متتالية $\{u_n\}$ ، $\{v_n\}$ ، $\{w_n\}$ تحقق المتراجحة،
$u_n \le v_n \le w_n$ و ______

— انتهت محاضرة ...

Reem Al-Rahabi

☺ Good luck ☺

♡

أهم شيء التعاريف.
و الترجمة.
ستأتي بالامتحان.