18 / 10 / 2015 — الأحد ١٨ / ٤

طرائق العد:

1/ قاعدة الـ $m \times n$: إذا احتاج عمل ما لمرحلتين، المرحلة الأولى تتم بـ m طريقة، ومن أجل كل طريقة تتم المرحلة الثانية بـ n طريقة، فإن العدد الكلي للأشكال المختلفة لاستكمال هذا العمل تتم بـ $m \times n$ طريقة.

مثال: قاعة للاحتفالات لها أربعة أبواب، بكم طريقة مختلفة يمكنك الدخول إلى القاعة والخروج منها دون أن تستخدم الباب ذاته في الدخول والخروج؟

الحل:

① عملية الدخول إلى القاعة تتم بـ 4 طرق.

② عملية الخروج من القاعة تتم بـ 3 طرق.

وبالتالي عدد الطرق المختلفة للدخول والخروج هي

$4 \times 3 = \boxed{12}$ طريقة

2/ المبدأ الأساسي في العد: هو تعميم لقاعدة الـ $m \times n$ وذلك إذا احتاج عمل ما إلى $\boxed{K}$ مرحلة وكل مرحلة تحتاج إلى $\boxed{n_i}$ طريقة حيث $\boxed{i = 1, 2, \ldots, K}$ فيكون عدد الطرق المختلفة لإتمام هذا العمل هو

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_K}$$

مثال: كم عدداً يمكن تكوينه من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تشكيله من الأرقام 1، 2، 3، 4، 5 على ألا يتكرر الرقم في أي عدد أكثر من مرة؟

الحل:

هذا العمل يحتاج إلى ثلاثة مراحل،

المرحلة الأولى : اختيار رقم الآحاد ويتم بـ $(n_1=5)$

" الثانية : " " العشرات " بـ $(n_2=4)$

" الثالثة : " " المئات " بـ $(n_3=3)$

فيكون عدد الأعداد الممكنة هو

$5 \times 4 \times 3 = \boxed{60}$ عدد

#حالة خاصة:

إذا كان لدينا تجربة نتائجها N وكررنا هذه التجربة n مرة وبشكل مستقل في كل مرة من المرات الأخرى عندئذ يكون عدد النتائج الكلية هو

$$|\Omega| = N^n$$

مثال: تجربة دراسة توزيع الذكور لدى أسرة تملك ثلاثة أطفال:
لدينا فضاء العينة

$$\Omega = \{BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG\}$$

$$|\Omega| = 2^3 = \boxed{8}$$

#ملاحظة:

في حالة تجربة ثنائية (لها نتيجتين فقط) وكررنا بشكل مستقل هذه التجربة $\boxed{n}$ مرة ولنرمز Ω فضاء العينة لكل النتائج الممكنة فإن

$$|\Omega| = \boxed{2^n}$$

3/ العينات المرتبة: إذا كانت A مجموعة غير خالية، وكان $\boxed{r \in \mathbb{N}^*}$ فإننا نسمي كل عنصر $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ من $\boxed{A^r}$ يدعى احتمالياً عينة مرتبة من الحجم $\boxed{r}$ مأخوذة من المجموعة A، ويكون عدد العينات المرتبة هو:

أ) في حالة $|A| = n$. السحب $\boxed{r}$ مرة متتالية مع الإعادة

$$\boxed{|\Omega| = n^r}$$

ب) في حالة $|A| = n$ ، السحب $\boxed{r}$ مرة متتالية $(r \le n)$ دون إعادة.

$$|\Omega| = n(n-1)\ldots(n-r+2)(n-r+1)$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

(ترتيب (r,n)):

والعناصر في هذه الحالة مختلفة وندعوها العينة المرتبة سحباً من الحجم r مأخوذة من A.

4/ الترتيب: نعني ترتيب $\boxed{r}$ من الأشياء المتمايزة (المتبادلة) حيث نفرض أنه لدينا n شيء متمايز ونريد اختيار $\boxed{r}$ شيء منها $(r \le n)$ ثم ترتيبها في متتالية، فيكون عدد الطرق المختلفة للقيام بهذا الترتيب هو

$$\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}} \quad ; (r \le n)$$

وعندما يكون $\boxed{r=n}$ أي نريد ترتيب عناصر المجموعة بأكملها فإن عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك هو $P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع n كرة في n صندوق ؟

$\boxed{|\Omega| = n^n}$ طريقة

مثال: لدينا فريق مؤلف من ستة أفراد نريد ترتيبهم في أماكن مكتبية ولكن لا يتوفر سوى أربعة أماكن، بكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة المتوفرة بأربعة أفراد نختارهم من الستة؟

$$P^n_r = P^6_4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}$$

$= \boxed{360}$ طريقة

لاختيار أربعة أفراد من ستة أي لترتيب ستة أفراد في أربعة أماكن.

5/ التوافيق: إن العديد من المواقف في الحياة تقتضي أن لا نأخذ ترتيب العناصر في الأنساق.

فإذا كان لدينا مجموعة A عدد عناصرها $\boxed{n}$ وأردنا اختيار مجموعة جزئية مؤلفة من $\boxed{r}$ عنصر $(r \leq n)$، فنقول عندئذ إن ذلك يدعى توافقية مجموعها $\boxed{r}$ مأخوذة من المجموعة A ونرمز لها بـ:

C^n_r أو $\binom{n}{r}$ ويكون

$$C^n_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$(n \geq r)$

لسهولة التذكر

$\boxed{C^{n \geq r}_r}$

ملاحظات:

① اصطلاحاً نضع: $\boxed{0! = 1}$ ، $\boxed{1! = 1}$

② بسهولة نجد: $\boxed{C^n_1 = n}$ ، $\boxed{C^n_n = 1}$ ،

$\boxed{C^n_0 = 1}$ ، $\boxed{C^n_{n-1} = n}$

③ بالحساب نجد:

$$C^{n+1}_r = C^n_r + C^n_{r-1}$$

$$C^n_r = C^n_{n-r}$$

④ إن عدد الطرائق التي يمكن بها تقسيم $\boxed{n}$ شيئاً متمايزاً إلى قسمين أحدهما $\boxed{n_1}$ شيئاً، والآخر يتضمن $\boxed{n_2}$ شيئاً حيث $\boxed{n_1 + n_2 = n}$ هو:

$$C^n_{n_1} = C^n_{n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$$

ونرمز لذلك بـ

$$C^n_{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$$

ويمكن تعميم ذلك من أجل تقسيم المجموعة المؤلفة من n عنصر إلى $\boxed{K}$ مجموعة يتضمن $\boxed{n_1}$ عنصر والثاني $\boxed{n_2}$ عنصر ، والأخير $\boxed{n_K}$ عنصر حيث $\boxed{n_1 + n_2 + \cdots + n_K = n}$ ويكون عدد الطرائق لهذا التقسيم هو

$$C^{n}_{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

مثال: إيجاد عدد طرائق اختيار ثلاثة كتب من $\boxed{7}$ كتب لترتيبها على رف ما؟

$$C^{7}_{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\times6\times5}{(3)(2)(1)!} = \boxed{35}$$ طريقة

مثال: بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث طالبات من مجموعة مكونة من 5 طالبات؟

$$C^{5}_{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = \boxed{10}$$ طرق

الرقعة .