د. هدى ٤٠٢ 2015/ 10 / 19

* الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت *

* هي حركة جسم صلب تثبت فيه نقطتان وفي المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين بمحور الدوران.

ورأينا سابقاً أنه عندما نثبت نقطتين من جسم صلب فإن عدد درجات الحرية له تساوي 1 أي يوجد إحداثي معمم واحد وبالتالي توجد معادلة للحركة واحدة.

* كيفية اختيار الإحداثي المعمم: نختار الزاوية θ بين مستويين، مستوي ثابت يحوي محور دوران ومستوي متماسك أيضاً يحوي محور دوران. مثال: باب مع الحائط.

فبمعرفة العلاقة: $\theta = \theta(t)$ هذه معادلة الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت عن طريق θ نعرف موضع أي نقطة من الجسم ونلاحظ أنه عندما يدور الجسم الصلب حول المحور فإن كل نقطة منه ترسم دائرة تقع في مستوي يعامد محور دوران ومركزها يقع على محور دوران ونصف قطرها هو بعد النقطة عن محور دوران وبالتالي فإن مسارات هذه النقط هي عبارة عن دوائر متوازية تعامد محور الدوران فإذا دارت أي نقطة بزاوية θ فإن جميع نقاط سوف تدور بنفس الزاوية.

* السرعة الزاوية: نرمز لها ب ω وهي مشتق زاوية بالنسبة للزمن أي $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

* شعاع الدوران: هو الشعاع المحمول على محور دوران قيمته تساوي سرعة زاوية وجهته تكون بحيث دوران حول المحور يكون بالاتجاه الموجب. (عكس عقارب الساعة)

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}$$

شعاع واحدة المحور

قيمة جبرية

* في الحركة الدورانية دوماً في جميع المسائل سنختار المحور oz هو محور دوران.

إذاً شعاع دوران هو ثابت منحى ولكن متغير في القيمة وهو نفسه بالنسبة لجميع نقاط الجسم.

إذا كان شعاع دوران ثابت فالحركة دورانية منتظمة.

* **التسارع الزاوي**: هو مشتق السرعة الزاوية بالنسبة للزمن ويرمز له بـ ε أي $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

* **شعاع التسارع الزاوي**: هو مشتق شعاع الدوران بالنسبة للزمن.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

محمول على محور دوران دوما لكن جهته ليس دوما جهة شعاع دوران.

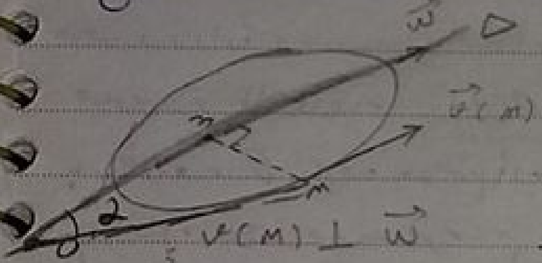
$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ لهما نفس جهة فالحركة متسارعة.

$\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ جهتين مختلفتين « متباطئة.

$\vec{\omega}$ ثابت أي $\vec{\varepsilon} = 0$ فالحركة منتظمة.

$\vec{\varepsilon}$ ثابت فالحركة متغيرة بانتظام.

الدراسة الشعاعية للحركة: - **توزع السرع**: لتكن M نقطة من الجسم الصلب رأينا أن مسار أي نقطة عبارة عن دائرة مركزها يقع على محور دوران ومستويها عمودي على محور دوران ونصف قطرها يختلف حسب بعد أو قرب النقطة من محور دوران فشعاع سرعة نقطة M يحمل على مماس دائرة.



ط1: $\vec{v}(M) \perp \vec{\omega}$

ولدينا أيضاً $\vec{v}(M) \perp \vec{mM}$

m المسقط القائم لـ M على محور دوران.

$\vec{v}(M) \perp \vec{\omega}$ لأن شعاع دوران عمودي على مستوي وبالتالي عمودي على أي مستقيم في مستوي

(بطريقة مباشرة) $\Rightarrow \vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{mM}$

وبالتالي قيمة العددية لها:

$$|\vec{v}(M)| = |\vec{\omega}| . |\vec{mM}| . \sin\frac{\pi}{2}$$
$$= \omega . r$$

ط2: $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{mM}$, $O \in \Delta$ نقطة اختيارية

$$= \vec{\omega} \wedge (\vec{mO} + \vec{OM})$$
$$= \vec{\omega} \wedge \vec{mO} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$
$$= 0 + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

شعاعين على نفس الحامل جداء خارجي لهم معدوم.

بأخذ قيمة العددية لها:

$$|\vec{v}(M)| = |\vec{\omega}| . |\vec{OM}| \sin\alpha$$
$$= |\vec{\omega}| . |\vec{mM}| = \omega . r$$

- توزع التسارعات :

$$\forall M \in S,\ \vec{\Gamma}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{OM})}{dt}$$

مشتق أول في ثاني + مشتق ثاني في أول

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{mM})$$

حسب علاقة جيبس

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$$

$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + (\vec{\omega}\cdot\vec{mM})\,\vec{\omega} - \omega^2\vec{mM}$$

متعامدان جداؤهم السلمي معدوم

تدل على جهة شعاع ودوماً نحو

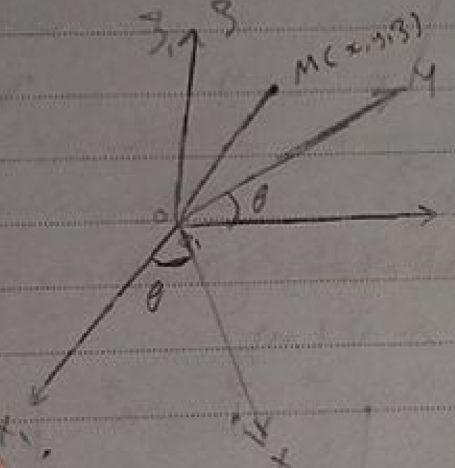
$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} - \omega^2\vec{mM}$$

$\vec{\Gamma}_T(M)$ تسارع مماسي — تسارع ناظمي $\vec{\Gamma}_N(M)$

نقطة اختيارية من محور دوران — نعتبر مسقط M على محور دوران

الدراسة التحليلية :

نختار جملة محاور ثابتة $O_1x_1y_1z_1$ بحيث أحد المحاور منطبق على محور الدوران Δ وليكن O_1z_1 ونختار جملة محاور متماسكة مع الجسم $oxyz$ بحيث أحد المحاور منطبق على محور الدوران وليكن oz (o ينطبق o_1)

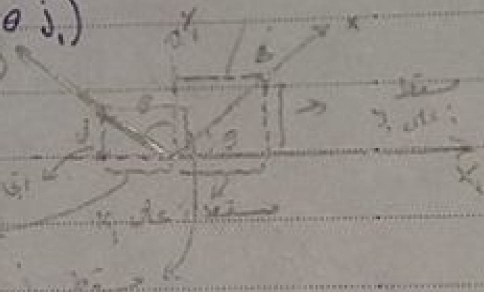


شعاع الموضع :

$$\forall M\in S,\ \vec{O_1M} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(x, y, z) ثوابت.

$$\vec{i} = (\cos\theta\,\vec{i}_1 + \sin\theta\,\vec{j}_1)$$
$$\vec{j} = (-\sin\theta\,\vec{i}_1 + \cos\theta\,\vec{j}_1)$$
$$\vec{k} = \vec{k}_1$$



$$\Rightarrow \vec{O_1M} = x(\cos\theta\,\vec{i}_1 + \sin\theta\,\vec{j}_1) + y(-\sin\theta\,\vec{i}_1 + \cos\theta\,\vec{j}_1) + z\vec{k}_1$$

$$\vec{O_1M} = (x\cos\theta - y\sin\theta)\,\vec{i}_1 + \vec{j}_1(x\sin\theta + y\cos\theta) + z\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z_1 = z$$

مركبات نقطة M في جملة ثابتة

إذا أردنا : مشتقات مسقط شعاع في جملة ثابتة