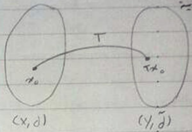
19 / 10 / 2015

# المحاضرة الثالثة - الاثنين

## التطبيقات المستمرة في الفضاءات المترية




- ليكن $(X,d)$ و $(Y,\tilde{d})$ فضاءين متريين..
- وهنا بالفضاء $Y$ مترك $\tilde{d}$ مختلف عن المترك $d$ الذي عُرِّفَ على الفضاء $X$، وبحالة خاصة ممكن أن يكون نفسه

ولكن $T$ تطبيق معرف بالشكل

$$T: X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto T(x) = y$$

- نقول عن $T$ إنه مستمر في $x_0 \in X$ إذا

وفقط إذا

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \underset{x \in X}{d(x, x_0)} < \delta$$

$$\Rightarrow \tilde{d}(Tx, Tx_0) < \varepsilon$$

ويكون $T$ مستمراً إذا كان مستمراً في كل نقاطه

- عندما نطلب إثبات أنه مستمر نعود إلى التعريف السابق

- قلنا عن $T$ تطبيق وليس دالة لأن: لأنه لدينا فضاءين وكل فضاء معرف عليه مترك مختلف .. أي هناك بنيتين مختلفتين ويجب أن يكون تطبيق يحترم بنيتهما ..

لكن ليس من الخطأ أن نقول دالة لكن جرت العادة في الكتب تسميته بتطبيق

**تذكرة**

- بالفضاء $\mathbb{R}$ كنا نعرف الاستمرار حسب ... أي $|f(x) - f(x_0)|$ ...

- ملاحظة:

أخذنا النقطة $x_0$ من $X$ لأنه يجب أن ندرس الاستمرار بنقطة من خارج الساحة ..

**ملاحظة هامة!**

التفكير الرياضي الصحيح للبرهان ملاحظة مهمة هي البرهان على شيء ما لا على التعيين

ومثال على ذلك هو الاستمرار في الفضاء المتري هنا ندرس الاستمرار بالفضاء المتري نأخذ أي نقطة لا على التعيين ويجب أن تكون محققة للتعريف

مبرهنة ((شرح)) ① هامة جداً ومكررة ..

إذا كان $(X,d)$ و $(Y,\tilde{d})$ فضاءين متريين وانتقلنا من $X$ إلى $Y$ بواسطة تطبيق $T$ فإن الشرط اللازم والكافي كي يكون $T$ مستمراً $X$

وإلا لما نقول عن مجموعة أنها مفتوحة فإننا نقصد أنها مفتوحة بخصوص الفضاء في هذه المجموعة

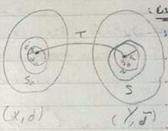
هو أن يكون الخيال العكسي لكل مجموعة مفتوحة من $Y$ مجموعة مفتوحة من $X$

أي:

$T$ مستمر $\Longleftrightarrow$ الخيال العكسي لأي مجموعة مفتوحة في $Y$ مجموعة مفتوحة في $X$

البرهان:

$(\Longleftarrow)$:




لتكن $S$ مجموعة مفتوحة في $Y$ ولتكن $S_0$ خيالها العكسي في $X$ وفق $T$

الآن نميز حالتين لـ $S_0$ وهي

$S_0 = \emptyset$ فهي مفتوحة (محققة)

أو $S_0 \neq \emptyset$ أي على الأقل فيها عنصر ..

$x_0 \in S_0$

• ميزنا حالتين لأنه ربما تكون $S_0$ خالية لأن الزمن هناك خيال العكسي موجود في $S$ بالمستقر والمستقر ليس بالضرورة أن يكون مستقر فعلي. أما لو بالعكس فتأكيد لا تكون خالية (أي أخذنا صورة وفق $T$)

ولأن $T$ مستمر أي يحول كل عنصر من المنطلق ... واحد فقط ويكون هذا ... هو صورة $x_0$ وفق $T$ وهي $Tx_0$ ونرمز له بـ $y_0$ أي

$x_0 \in S_0 \;,\; y_0 \in S$

وبما أن $S$ مجموعة مفتوحة فرضاً فهذا يؤدي إلى أن $y_0$ هي نقطة داخلية بالتالي لها جوار (كرة مفتوحة) ولها نصف قطر وليكن $\varepsilon$ ولأن $T$ مستمر

$\Rightarrow$ يوجد $\delta$ نصف قطر لمجموعة مفتوحة حول $x_0$ محتواة في $S_0$ وبالتالي $S_0$ مفتوحة ..

تم المطلوب

مستمر بسيط.

أي لأنه مستمر فإن جميع عناصر الكرة لا تقع ضمن $S_0$

أما لبرهان العكس $(\Longrightarrow)$:

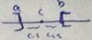
$x_0 \in X : Tx_0 = y_0 \in Y$

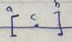
يوجد $\varepsilon$ نصف قطر لجوار النقطة $y_0$ وبالتالي هناك كرة مفتوحة في $Y$ وفي $X$ حيث نصف قطرها $\delta$

$\Rightarrow \varepsilon > 0 , \exists \delta > 0 : d(x,x_0) < \delta , x \in X \Rightarrow \bar d(y,y_0) < \varepsilon , y \in Y$

يتبع

ملاحظة في $\mathbb{R}$

1 — 

2 — 

لا يوجد فرق بين لصاقة 1 و 2

السؤال: هل هذا صحيح في كل الفضاءات المترية ؟!

الجواب: لا .... اعط مثال على ذلك !!

## المجموعة الكثيفة والفضاء الفصول ..

* ليكن $(X,d)$ فضاء متري و $M \subseteq X$

نقول عن $M$ إنها كثيفة في $X$ إذا وفقط إذا كانت لصاقة $M$ تساوي $X$ أي:

$M$ كثيفة في $X$ $\Longleftrightarrow$ $\bar{M} = X$

* أمثلة:

- $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ لأن: $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
- مثال آخر: $\alpha + \beta i$ ; $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$

هذه كثيفة في $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{C}$

- $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{Q}^n$ كثيفة في $\mathbb{R}^n$ لأن: $\bar{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$
- كل مجموعة كثيفة في نفسها.

* نقول عن فضاء إنه فصول إذا حوى مجموعة معدودة وكثيفة

مثال:

- $\mathbb{Q}$ فصول - $\mathbb{R}$ فصول - $\mathbb{R}^n$ فصول

نقول عن الفضاء غير فصول إذا لم يحقق ..

لنرهن أن الفضاء غير فصول يجب أن أي مجموعة كثيفة منه ستكون غير معدودة ...

* الفضاء $l^\infty$ هو فضاء المتتاليات المحدودة

نقول إن هذا الفضاء غير فصول ..

هام للمحاضرة التالية

. نقول عن المجموعة إنها معدودة إذا وجد تطبيق تقابل بينه وبين $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

. $\mathbb{R}$ وفضاءاته الجزئية غير معدودة

طاقة $[0,1]$ هي نفس طاقة $\mathbb{R}$

// هنا فضاء غير منتهي لو كان صحيحا كنا أخذنا العناصر الأكثر وكان فضاء ذو قدرة أكبر .. انتهت المحاضرة