• الفضاء ℓ^p

فضاء المتتاليات. ليكن p عدداً حقيقياً أكبر من ١ أو يساويه. نحن نعرف ℓ^p هو متتالية $x=(\xi_i)=\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots$ من الأعداد (الحقيقية / العقدية) بحيث تكون المتسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty \leftarrow \text{متقاربة}$$

ملاحظة هامة

الرمز السابق يدل الى ان ~~المتتالية~~ المتسلسلة متقاربة لماذا؟!

لان شروط التقارب هما الوجود (الوحدانية) و المحدودية (محدودة)

المتسلسلة السابقة هي متسلسلة حدودها مطلقة أي هي موجبة

وبالمتسلسلات ذات الحدود الموجبة شرط الوجود (الوحدانية) محقق

بالتالي عندما نكتب انه أصغر من ∞

فهذا يعني انه متقاربة!

ونعرف عليه المترك

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{1/p}$$

هل هذه موجودة؟!

2015 / 10 / 13

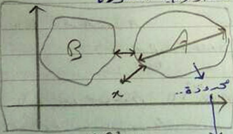
• هناك حالة خاصة عندما $p=2$ ويسمى فضاء هلبرت

• الفرق بين ℓ^p العقدي و ℓ^p الحقيقي بالمترك بالحقيقي هناك قيمة مطلقة أما بالعقدي هناك طويلة...

• الصفحة 15 بالكتاب مطلوب من المراجعات وليس البارح.. والمراجعات هي مكتوبة ببداية المحاضرة :)

بعض المفاهيم التبولوجية..

• أي مجموعة نعرف عليها مترك فاننا نعرف عليها طبولوجيا تسمى: الطبولوجيا المتولدة



$(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$

لانهاية لـ sup موجود

كيف نعرف قطر هذه المجموعة؟!

القطر هو أطول الأوتار.. اي هنا هو ابعد نقطتين في الساحة A هو القطر

لكن السؤال هنا ربما لا يوجد نقطتين تمثل هذا! البعد أي لربما تكون المجموعة مفتوحة. كمثال على ذلك هو المجال $]1,2[$ قطره هو 1

وهنا لا يوجد نقطتين تمثلان هذا البعد (القطر) لأن 2 لا تنتمي إلى المجال وبالتالي ولذلك البعد معطى بالشكل

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) = 1 .$$

أي هنا لا يوجد نقطتين تمثلان البعد ولكن عندما أخذنا الـ sup عندها النقطتين نتجوز في المسافة المطلوبة.

وبالتالي قطر المجموعة A

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

- البعد بين مجموعتين ..!! [بين B و A]

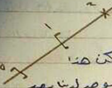
هو أقصر مسافة بين المجموعتين.

وأيضاً ليس بالضرورة إن هناك نقطة من المجموعة A و المجموعة B تعطيان المسافة لذلك نعرفه على الشكل التالي

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y) = \delta(A,B) .$$

- البعد بين نقطة ومجموعة: بين x و A مثلاً.

أيضاً هنا ليس بالضرورة أن يكون البعد موجود مثلاً



هنا لا يوجد أي نقطة تمثل البعد لكن هذا لا يعني أن لا يوجد لدينا بعد وهنا يعطينا أن البعد بين x و A هو

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,A)$$

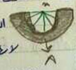
× سؤال في الهامش أسفل الورقة

في حال كانت $x = 2$

$A =]0,1[$

أي نريد أن نثبت أن الـ inf موجود ويساوي الـ (1).

في حال كانت المجموعة مغلقة فإن عدد النقاط التي تعطي البعد هو لانهائي. أما لو كانت مفتوحة لا يوجد لدينا ولا نقطة رغم ذلك البعد موجود



شكر الدكتور

ملاحظة: الجوار المغلق - المفتوح - المحذوف .. كله رح لي د $\boxed{\varepsilon\text{- جوار}}$

ملاحظة:

نستطيع تعريف متري إذا كان لدينا جداء ديكارتي لفضائين متريين.

بفرض لدينا فضائين متريين

(X_1,d_1) , (X_2,d_2)

$X = X_1 \times X_2$ جداء ديكارتي

أي عناصره ثنائيات

عندما يمكن تعريف أكثر من متري

حيث يمكنني أن أدخل أكثر من متري في مجموعة وبالتالي نستطيع تشكيل أكثر من فضاء متري على نفس المجموعة

هنا يمكن إدخال أكثر من متري في X بمساعدة d_1 و d_2

فمثلاً إذا أخذنا x,y من X

$\Rightarrow d(x,y)$

من X فهو ثنائية — من X فهو ثنائية

$x=(x_1,x_2)$ — $y=(y_1,y_2)$

من X_1 — من X_1

معرف عليها d_1

$\Rightarrow d(x,y) = d_1(x_1,y_1)+d_2(x_2,y_2)$

أثبت أن $d(x,y)$ متري

---

* المجموعات المفتوحة والمغلقة وبقية التعاريف التبولوجية.

ملاحظة كل كلامنا عن الكرات لكن هنا لا يعني أنها كرة، قرص)

فمثلاً في $\mathbb{R}$ هو مجال وفي $\mathbb{R}^2$ قرص وفي $\mathbb{R}^3$ كرة ..الخ

مجرد تسمية..

- الكرة المفتوحة والمغلقة

$x_0 \in X$ وليكن (X,d) فضاء متري و

$M(x_0,\varepsilon) = \{x\in X : d(x,x_0) < \varepsilon\}$

هي كرة مفتوحة و

$N(x_0,\varepsilon) = \{x\in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$

هذه الكرة مغلقة وفي حال كان

$d(x,x_0)=\varepsilon$

تسمى القشرة الكروية

- النقطة الداخلية

نقول عن $x_0 \in M$ أنها داخلية X إذا استطعنا أن نجد ε-جوار محتوى في M ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية بـ M° وفي حال كانت $M = M^\circ$ أي كل نقاط M هي داخلية فهي مجموعة مفتوحة وكل مجموعة متممها مفتوحة هي مجموعة مغلقة

- نقطة التراكم / العنق / مركز التجمع

نقول عن x_0 انها نقطة تراكم اذا كان تقاطع أي ϵ-جوار لـ x_0 مع M يحوي عدد غير منتهي من نقاط المجموعة. ونرمز لمجموعة نقاط التراكم بـ M'.

ملاحظة:

ان المجموعة الغير منتهية لا تحوي نقاط تراكم.

- اللصاقة..

هي المجموعة المكونة من نقاط M اجتماع المجموعة المشتقة (M')

$\bar{M} = M \cup M'$

المجموعة المفتوحة هي التي تساوي داخلها

$\Leftarrow$ اكبر مجموعة مفتوحة محتواة بـ M هي M°

واصغر مجموعة مغلقة تحوي M هي $\bar{M}$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

ملاحظة:

اذا طلب منا أثبت ان المجموعة مفتوحة نثبت انها تساوي M°.

اذا طلب اثبات ان المجموعة مغلقة نثبت انها تساوي $\bar{M}$

لأن المجموعة المغلقة تحوي نقاط تجمعها

أن $]0,1[$ مفتوحة لانها لا تملك نقاط تجمع وليست مغلقة

أما $\{1,2,3\}$ تحوي نقاط تجمعها

انتهت المحاضرة

المتباينات المطلوبة من الكتاب..

٢. المتباينة المساعدة.

$$\forall\ a,\beta>0$$
$$a\beta \le \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^\beta u^{q-1}du$$

الاستنتاج غير مطلوب لكنه موجود بالكتاب ص 15.

+ متباينة هولدر للمجاميع ..

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{1/q}$$

+ متباينة كوشي شفارتز للمجاميع ..

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i \eta_i| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2}$$

+ متباينة منكوفسكي للمجاميع ..

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{1/p}$$