• بعض الملاحظات الهامة

[1] $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$ و $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi K \ ; K \in \mathbb{Z}$

[2] $r_1 \,\text{Cis}\,\alpha_1 = r_2 \,\text{Cis}\,\alpha_2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2\pi K \ ; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$

[3] $(\text{Cis}\,\alpha)^n = (\text{Cis}\, n\alpha) \ ; n \in \mathbb{N}$

صيغة دوموافر

• إثبات صحة صيغة دوموافر بالنسبة لـ $m \in \mathbb{Z}$

$m > 0$ واضح

$m = 0$ واضح

$m < 0 \ : m = -n \Rightarrow n = -m$

$\Rightarrow (\text{Cis}\,\alpha)^m = (\text{Cis}\,\alpha)^{-n}$

$= [(\text{Cis}\,\alpha)^{-1}]^n = (\text{Cis}\,\alpha)^n$

$= \text{Cis}\, n\alpha = \ell_2$

تمرين: أوجد $\cos 3\alpha$ بدلالة $\cos\alpha$ باستخدام الأعداد العقدية..

$(\text{Cis}\,\alpha)^3 = \text{Cis}\,3\alpha$ حسب دوموافر

$\ell_1 = [\cos\alpha + i\sin\alpha]^3 = \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha\,(i\sin\alpha) + 3\cos\alpha\,(i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3$

$= (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha) + i\,(3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha)$

$\ell_2 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$

بالمطابقة نجد

$\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos 3\alpha$

$\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = \cos 3\alpha$

$\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha = \cos 3\alpha$

بنفس الطريقة نجد $\sin 3\alpha$

$\Rightarrow \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ / $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

⊕ المجموعة النقطية بالمستوي العقدي

أمثلة:

• $\operatorname{Im} z = 0$

فهذه المعادلة السابقة في المستوي العقدي المحور الحقيقي ox ...

لكن يجب أن نكتبها كمجموعة نقطية أي

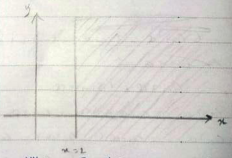
$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$

ولكن اختصاراً نستعمل الطريقة الأولى بالكتابة

• $\operatorname{Re} z = 2$

هذه تمثل المستقيم $x = 2$ في المستوي العقدي

• $\operatorname{Re} z \geq 2$



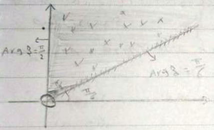
المعادلة السابقة تمثل القسم المظلل أي هي نصف المستوي العقدي الواقع على يمين المستقيم $\operatorname{Re} z = 2$ مع المستقيم

ملاحظة: في الرسم لو كنا نريد المتراجحة $\operatorname{Re} z > 2$ أي لا نريد أن يكون المستقيم $\operatorname{Re} z = 2$ داخل ضمن المجموعة فهناك حلين للتمثيل بالرسم

الأولى: أن نرسم المستقيم متقطع أي بشكل [⋮]

الثانية: أن نضع إشارات على المستقيم أي بشكل [⋮]، وسنعتمده بالأمثلة.

• $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{2}$

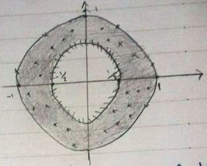


هي القطاع الزاوي الذي ضلعاه $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{6}$ و $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{2}$ بدون الضلع $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{6}$ وبدون المبدأ أيضاً

ملاحظة:

لم نأخذ المبدأ لأنه لا يوجد به زاوية وهنا نريد زوايا

o $\frac{1}{2} < |z| < 1$



$|z|$ هي بعد النقطة عن المركز.. أي هي
تمثل الحلقة بين الدائرتين $|z|=1$ و $|z|=\frac{1}{2}$
مع المحيط الخارجي بدون المحيط الداخلي

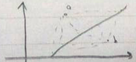
o $Re\, z = Im\, z$

كأننا نقول $x=y$ منصف الربع الأول والثالث
في المستوي العقدي

o $|z-a| = |z-b|$

هندسياً بعد z عن b يساوي بعد z عن a

a,b ثابتان بالمستوي.. أي هو مجموعة
الأعداد العقدية في المستوي التي يكون بعدها
عن b مساوياً لبعدها عن a أي هو محور
القطعة المستقيمة
التالية :

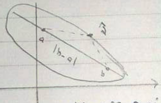


o لو أردنا صياغة ديكارتية نعوض z
بشكل و $a=a_1+a_2 i$ و $b=b_1+b_2 i$
ونكمل... الحل مع الطالب

o $|z-a|+|z-b|=2c$

a, b ثوابت عقدية
c ثابت حقيقي

في حال $|b-a|<2c$



أي هي تمثل القطع الناقص
إذا كان $|b-a|=c$ منصف من المحور
إذا كان $|b-c|>2c$ خالية

وظيفة:

o $|z-a|+|z-b| = 2$

o $Re(z-2) \geq 1$