المحاضرة الأولى   / /

تذكرة وتعاريف عامة:

فضاء العينة: هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ونرمز له عادة بـ Ω ونرمز لعدد عناصر Ω بـ $|\Omega|$ وسمى أيضاً $\boxed{\text{عدّة } \Omega}$ أو $card(\Omega)$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد لدينا $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $|\Omega| = 6$

الحدث العشوائي: هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة (اختصاراً نسميه حدثاً) يرمز له بحرف كبير مثل A أو B أو...

مثال: في تجربة إلقاء حجر النرد لدينا المجموعات التالية

$A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{3\}$ ، $C = \{1, 2, 3\}$

هي احداث متعلقة بتلك التجربة لأن كل واحدة هي مجموعة جزئية من Ω في حين أن المجموعة $M = \{2, 9\}$ ليست حدثاً.

- الحدث الابتدائي: هو كل حدث عشوائي يحوي عنصراً واحداً فقط من Ω

مثال: $\{6\}$ ، ... ، $\{2\}$ ، $\{1\}$ هي احداث ابتدائية

/ /

وقوع حدث : نقول عن حدث A انه قد وقع بعد اجراء التجربة إذا كانت النتيجه ω تنتمي إلى A أي $\omega \in A$

- نسمي الحدث Ω بالحدث الاكيد
- " " $\varnothing$ بالحدث المستحيل

- الحدثان المنفصلان (المتنافيان) : نقول عن حدثين A و B أنهما منفصلان أو متنافيان اذا كان $\boxed{A \cap B = \varnothing}$ (أي لا يمكن وقوعهما معا)

- متمم حدث : نسمي متمم حدث ونرمز له بـ A' أو A^c وهو الحدث الذي يتضمن كل نقاط (عناصر) فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث A وبالتالي لدينا:

$A \cap A' = \varnothing$ و $A \cup A' = \Omega$ ، وبالتالي :

$A' = \Omega / A$ ، $A = \Omega / A'$

- تجزئة فضاء العينة : نقول عن أسرة (مجموعة مجموعات) الاحداث

$F = \{ F_i \ : \ F_i \subseteq \Omega \ , \ i \in I \}$ حيث $(I \subseteq N)$

- مجموعة منتهية أو غير منتهية لكنها قابلة للعد إنها تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω إذا تحققت الشروط :

1) $F_i \neq \varnothing \quad \forall F_i \in F$

2) $F_i \cap F_J = \varnothing \ ; \ i \neq J \ , \ \forall F_i , F_J \in F$

3) $\bigcup_{i \in I} F_i = \Omega$

تسمى الاحداث F_i حيث $i \in I$ عناصر التجزئة F

<u>مثال:</u> الاسرة: $F = \{f_1, f_2\}$ حيث $f_1 = \{1,2,3\}$
$f_2 = \{4,5,6\}$ تشكل تجزئة لـ $\Omega = \{1,2,\dots,6\}$

الجبر والجبر التام (σ-جبر)

تعريف: إذا كانت Ω فضاء الاحداث الابتدائية
وكان F صفاً (أو اسرة) غير خال من اجزاء Ω فاننا نقول
عن f انه $\boxed{\text{جبر على } \Omega}$ إذا تحقق الشرطان:

1) $\forall A, B \in F : A \cup B \in F$ (أي أنه مغلق بالنسبة
للاجتماع (الاتحاد المنتهي))

2) $\forall A \in F : A' \in F$ (أي أنه مغلق بالنسبة
للاتمام (المتمم))

<u>مثال:</u> $F = \{A, A', \Omega, \emptyset\}$ هو جبر على Ω يسمى الجبر التام

تعريف: إذا كان الصف f جبراً على Ω ويحقق الشرط
التالي: (أي إذا تحقق الشرطين السابقين (1) و(2) بالاضافة للشرط التالي فيكون جبراً تاماً على Ω)
$\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F : (\bigcup A_i) \in F$ [الصف مغلق بالنسبة
للاجتماع المعدود]
اذا

فاننا نسمي f جبراً تاماً (σ-جبر) على Ω

/ /

مجموعة منتهية: $A_1, A_2, \dots A_n$

$\underbrace{A_1 \cup A_2}_{B_1} \in F \quad , B_1 \cup A_3 \in F$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in F$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$

ملاحظة: إذا كان f جبراً على Ω فإن ما يلي محقق:

1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i' \in f \quad : \forall A_1, \dots, A_n \in f$

2) $A \cap B \in f \quad : \forall A, B \in f$

برهان رقم (2): $A, B \in f \Rightarrow A', B' \in F$
مثلاً

$\Rightarrow A' \cup B' \in f \Rightarrow (A \cap B)' \in F$

$\Rightarrow ((A \cap B)')' \in F \Rightarrow A \cap B \in f$

---

3) $\forall A_1, \dots, A_n \in F \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in f$

4) كل جبر تام هو جبر لكن العكس غير صحيح على Ω

أمثلة: 1) $P(\Omega)$ مجموعة جميع أجزاء Ω هي جبر وجبر تام على Ω

2) $f = \{\emptyset, \Omega\}$ هو جبر وجبر تام على Ω

3) المجالات المفتوحة من R ليست جبر ولا جبر تام على Ω

نتائج: 1) إذا كان F جبراً أو جبراً تاماً على Ω فإن
$\emptyset , \Omega \in F$

برهان: $\forall A \in F \Rightarrow A' \in F \Rightarrow \begin{cases} A \cup A' = \Omega \in F \\ A \cap A' = \emptyset \in F \end{cases}$

2) إذا كان f جبراً على Ω فإن F مغلق بالنسبة للاتحاد (الاجتماع) المنتهي والتقاطع المنتهي.

3) في الحالة الخاصة عندما تكون فضاء العينة منتهياً فإن كل جبر على Ω هو جبر تام على Ω

4) إذا كان F جبراً على Ω فإن F مغلق بالنسبة لعملية الفرق
أي $A / B \in F \quad , \quad \forall A , B \in F$

5) تقاطع الجبور (الجبور التامة) هو جبر (جبر تام)

تعريف: إن الجبر (الجبر التام) $\sigma(F)$ هو الجبر الذي يولده F (الجبر التام الذي يولده F) وهو عبارة عن تقاطع جميع الجبور (الجبور التامة) التي تحوي F

$$\sigma(F) = \bigcap_{\substack{i \\ F \subset X_i}} X_i$$

تتلفظ (كاي x)

تعريف: إن الجبر التام الذي يولده صف المجالات المحدودة على R يدعى جبر بوريل وكل مجموعة منتمية له تدعى مجموعة بوريلية

نتيجة : إن كل مجموعة جزئية احادية $\{x\}$ من $\mathbb{R}$ هي بورلية

لأن: $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x - \frac{1}{n} , x + \frac{1}{n}]$

لأن المجالات المحدودة تنتمي إلى جبر بورل وهو جبر تام أي مغلق بالنسبة للتقاطع المعدود وبالتالي $\{x\}$ بورلية

تعريف: إذا كانت Ω مجموعة غير خالية و F جبراً تاماً من أجزائها فإن الثنائية (Ω , F) تدعى **فضاءً قيوساً** وندعو كل عنصر من F **مجموعة قيوسة**

ص 18 نظرية من كتاب 6 صفحات

نتيجة: إن Ω و $\emptyset$ مجموعة قيوسة

تعريف: ليكن (Ω , F) فضاءً قيوساً، نقول عن الدالة

$$\mu : (\Omega , F) \longrightarrow [0 , +\infty]$$

أنها تمثل قياساً على F إذا حققت الشروط:

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F : \quad i \neq j , A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

- تعريف: ندعو الثلاثية (Ω , F , μ) فضاء القياس μ
- حالة خاصة: إذا كان $\mu(\Omega) = 1$ فإن μ يدعى قياساً احتمالياً على F ونرمز له ب P وتصبح الثلاثية (Ω , F , P) فضاء القياس الاحتمالي (او اختصاراً الفضاء الاحتمالي)