جامعـة دمشـــق

كليـة العلـــوم

قسـم الرياضيـات

السنـــة الدراسيـة الثانية

اقرأ وارتقِ

مقرر التحليل 3

المحاضرة السابعة

تاريخ المحاضرة: 3/11/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

مُبرهنة(4): لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ متتالية توابع معرفة على مجال مثل I ، ولنفرض أن

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

أي أن المتتالية التابعية متقاربة نقطياً من التابع $f(x)$ على I.

عندئذٍ فإن القضيتين الآتيتين متكافئتين:

1– المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I.

2– إذا رمزنا بـِ $M_n = \sup_{x\in I}\{|f_n(x) - f(x)|\}$ لكُل $n \geq 1$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = 0$$

"للتطبيق والفهم فقط والبرهان غير مطلوب"

مثال: لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ وبحيث $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ و $x \in I =]0,+\infty[$.

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx+1} = 0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I =]0,+\infty[$.

سوف نقوم بتشكيل M_n لكُل $n \geq 1$ ، ومن أجل ذلك لدينا:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{nx+1} - 0\right| = \left|\frac{1}{nx+1}\right| \underset{\substack{\text{لأن } n\geq1 \text{ موجب} \\ \text{و } x\in I=]0,+\infty[\\ \text{اي } x \text{ موجبة}}}{=} \frac{1}{nx+1} \quad \dots(1)$$

منطقياً لدينا:

$$x > 0 \Rightarrow nx > 0 \quad ; \quad \forall\, x \in I =]0,+\infty[\ ,\forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \ nx + 1 > 1 \quad ; \quad \forall\, x \in I =]0,+\infty[\ ,\forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{nx+1} < 1 \quad ; \quad \forall\, x \in I =]0,+\infty[\ ,\forall\, n \geq 1$$

بالاستفادة من الأخيرة في (1) فنجد أن:

$$|f_n(x) - f(x)| < 1 \quad ; \quad \forall\, x \in I =]0,+\infty[\ ,\forall\, n \geq 1$$

ومنهُ:

$$M_n = \sup_{x\in]0,+\infty[} \{|f_n(x) - f(x)|\} \leq 1 \quad ; \quad \forall\, n \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]0,+\infty[} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 1 \neq 0$$

مكتبـــــة بريمـــــا فيــــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$

بالتالي "استناداً للمبرهنة السابقة" فإن متتالية التوابع المفروضة ليست متقاربة بانتظام من التابع الصفري على المجال $I =]0,+\infty[$.

مُبرهنة(5) (اختبار كوشي): تكون متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ المعرفة على مجال ما مثل I متقاربة بانتظام من تابع مثل $f(x)$ على I إذا وفقط إذا تحقق الآتي:

آياً كان العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon > 0$ فإنهُ يوجد عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

وذلك من أجل جميع قيم $\underbrace{m,n}_{\text{أعداد طبيعية}}$ المحققة لِـ $m \geq n \geq N_0$ ، ولأجل جميع قيم x من المجال I.

"للتطبيق والفهم فقط والبرهان غير مطلوب"

مثال: لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ وبحيث $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ و $x \in I = [0,1]$.

المطلوب أثبت أنها متقاربة بانتظام على I.

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} . \lim_{n\to+\infty} x^n \underbrace{=}_{\text{كون } 0\leq x\leq 1} 0.0 = 0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,1]$.

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ لنبحث في وجود عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

وذلك من أجل جميع قيم m,n المحققة لِـ $m \geq n \geq N_0$ ، ولأجل جميع قيم x من المجال I.

$$|f_m(x) - f_n(x)| = \left|\frac{x^m}{m} - \frac{x^n}{n}\right| \underbrace{\leq}_{\text{خواص القيمة المطلقة}} \left|\frac{x^m}{m}\right| + \left|\frac{x^n}{n}\right| \underbrace{=}_{\substack{\text{كون } n,m \text{ موجبان} \\ \text{لأنهما أعداد طبيعية} \\ \text{وكون } x\in[0,1] \text{ فهو موجب}}} \frac{x^m}{m} + \frac{x^n}{n} \underbrace{\leq}_{\substack{\text{وذلك لكُل} \\ x\in I=[0,1]}} \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

بالتالي:

$$\underbrace{|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall\, x \in I = [0,1]}_{(1)}$$

العدد الطبيعي $N_0 \neq 0$ يجب اختيارهُ بحيث يُحقق (1) من أجل كُل قيم m,n المحققة لِـ $m \geq n \geq N_0$ ، ومن أجل كُل قيم $x \in I = [0,1]$.

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـون الجميلـة
$Mob : 0993586758 - Tel : 011\ \ 2124436$

$$\underbrace{m \geq N_0 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N_0} \quad and \quad n \geq N_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0}}_{\Downarrow \atop \frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leq \frac{2}{N_0}}$$

وبالتالي بالعودة إلى (1) نجد أن:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{N_0} < \varepsilon \quad ; \quad \forall\, x \in I = [0,1] \ , \forall\, m \geq n \geq N_0$$

وبالتالي نختار العدد الطبيعي N_0 بحيث يكون $\frac{2}{N_0} < \varepsilon$ أي بحيث $N_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ (وهو يتعلق بـِ ε فقط). ومع هذا الاختيار سوف يتحقق أنهُ من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يكون

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

من أجل جميع قيم m,n المحققة لِـ $m \geq n \geq N_0$ ، ولأجل جميع قيم x من المجال I.

مما سبق نستنتج "استناداً لاختبار كوشي" أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,1]$.

مُبرهنة(6) (اختبار ديني): لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية توابع مُعرفة ومستمرة على مجال مغلق مثل $I = [a,b]$ وبحيث $a,b \in \mathbb{R}$ ، وبفرض أن هذه المتتالية متقاربة نقطياً من تابع نهاية مثل $f(x)$ على I ، وبفرض أن تابع النهاية $f(x)$ مستمر على I ، وأن $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ اعتباراً من قيمة معينة لِـ n.
عندئذٍ تكون المتتالية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال المغلق I.

"للتطبيق والفهم فقط والبرهان غير مطلوب"

مثال: لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ وبحيث $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ و $x \in I = [0,\pi]$.
المطلوب أثبت أنها متقاربة بانتظام من التابع الصفري على I.

الحل: من الواضح أن حدود المتتالية التابعية المفروضة

$$f_1(x) = \sin x \ , f_2(x) = \frac{\sin x}{2}, f_3(x) = \frac{\sin x}{3}, \dots, f_n(x) = \frac{\sin x}{n}, \dots$$

عبارة عن توابع مستمرة على $I = [0,\pi]$.

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x}{n} = \sin x \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \sin x \,.\, 0 = 0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,\pi]$.
من الواضح أن تابع النهاية للمتتالية المفروضة والذي هو التابع الصفري $f(x) = 0$ أيضاً مستمر على $I = [0,\pi]$.

منطقياً لدينا:

$$n = n \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow n < n+1 \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{نضرب طرفي المتراجحة بـ } \sin x \\ \text{ولا تتغير إشارة المتراجحة} \\ \text{لأن } \sin x \text{ مقدار موجب} \\ \text{من أجل أي قيمة لِـ } x\in I=[0,\pi]}} \frac{\sin x}{n} > \frac{\sin x}{n+1} \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,\pi] \;\Rightarrow$$

$$f_n(x) > f_{n+1}(x) \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,\pi]$$

نستنتج أن متتالية التوابع المفروضة حدودها عبارة عن **<u>توابع مستمرة</u>** على **<u>المجال المغلق</u>** $I = [0,\pi]$ وأنها **<u>متقاربة نقطياً</u>** من التابع الصفري $f(x) = 0$ على ذلك المجال ، وأن تابع النهاية لها هو **<u>تابع مستمر</u>** على المجال المغلق $I = [0,\pi]$ ، وأن الشرط $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ **<u>مُحقق</u>** من أجل جميع قيم $n \geq 1$ ومن أجل جميع قيم x من $I = [0,\pi]$. وهذا يعني "استناداً لاختبار ديني" أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,\pi]$.

أمثــــــلة داعمــــــة

مثال(1): ادرس تقارب المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ بحيث

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad , \quad x \in I = [0,1]$$

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,1]$.

لنرى فيما إذا كان تقاربها من التابع الصفري منتظم أم غير منتظم على $I = [0,1]$؟

من أجل ذلك سوف نستعين بالمبرهنة(4):

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2} - 0\right| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| \underbrace{=}_{\substack{\text{كون } n \text{ موجبة} \\ \text{و } x\in I=[0,1] \text{ أي موجبة}}} \frac{x}{1+n^2x^2} \Rightarrow$$

$$\underbrace{|f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{1+n^2x^2} \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]}_{*}$$

منطقياً لدينا

$$(nx-1)^2 \geq 0 \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]$$

$$n^2x^2 - 2nx + 1 \geq 0 \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]$$

$$n^2x^2 + 1 \geq 2nx \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]$$

$$\underbrace{\frac{x}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]}_{**}$$

نستفيد من ** في * لنحصل من ذلك على:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]$$

ومنهُ:

$$M_n = \sup_{x \in I=[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} = \frac{1}{2n} \qquad ; \quad \forall\, n \geq 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I=[0,1]} \{|f_n(x) - f(x)|\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

وهذا يعني "استناداً للمبرهنة(4)" أن متتالية التوابع المفروضة **متقاربة نقطياً وبانتظام** من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,1]$.

مثال(2): ادرس تقارب المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ بحيث

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad ; \quad x \in I = [0,1]$$

الحل:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ على المجال $I = [0,1]$.

لنرى فيما إذا كان تقاربها من التابع الصفري منتظم أم غير منتظم على $I = [0,1]$؟

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \underset{\substack{\text{كون } n \text{ موجبة} \\ \text{و } x \in I=[0,1] \text{ أي موجب}}}{=} \frac{nx}{1+n^2x^2} \Rightarrow$$

$$\underbrace{|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \;,\; \forall\, x \in I = [0,1]}_{*}$$

منطقياً لدينا

$$\underbrace{\begin{aligned} (nx-1)^2 \geq 0 \quad &; \quad \forall\, n \geq 1\ ,\ \forall\, x \in I=[0,1] \\ n^2x^2-2nx+1 \geq 0 \quad &; \quad \forall\, n \geq 1\ ,\ \forall\, x \in I=[0,1] \\ n^2x^2+1 \geq 2nx \quad &; \quad \forall\, n \geq 1\ ,\ \forall\, x \in I=[0,1] \\ \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2} \quad &; \quad \forall\, n \geq 1\ ,\ \forall\, x \in I=[0,1] \end{aligned}}_{**}$$

نستفيد من ** في * لنحصل من ذلك على:

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1\ ,\ \forall\, x \in I=[0,1]$$

ومنهُ:

$$M_n = \sup_{x\in I=[0,1]} \{|f_n(x)-f(x)|\} = \frac{1}{2} \qquad ; \quad \forall\, n \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I=[0,1]} \{|f_n(x)-f(x)|\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

وهذا يعني أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً لكن هذا التقارب **غير منتظم** من التابع الصفري $f(x)=0$ على المجال $I=[0,1]$.

مثال(3): ادرس تقارب المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ بحيث

$$f_n(x) = x^2 + \frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n} \quad , \quad x \in I = \mathbb{R}$$

الحل:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left[x^2 + \frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right] = x^2 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}$$

$$= x^2 + 0 = x^2 \;\Rightarrow\; f(x) = x^2$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع $f(x)=x^2$ على $I=\mathbb{R}$.

لنرى فيما إذا كان تقاربها من تابع النهاية $f(x)=x^2$ منتظم أم غير منتظم على $I=\mathbb{R}$؟

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|x^2 + \frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n} - x^2\right| = \left|\frac{\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{n}\right| \underset{\text{كون } n \text{ موجبة}}{=} \frac{\left|\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n} \Rightarrow$$

$$\underbrace{|f_n(x)-f(x)| = \frac{\left|\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \ , \ \forall\, x \in I = \mathbb{R}}_{*}$$

لكن نعلم أن:

$$\left|\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1 \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \ , \ \forall\, x \in I = \mathbb{R}$$

ومنهُ

$$\underbrace{\frac{\left|\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{n} \leq \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \ , \ \forall\, x \in I = \mathbb{R}}_{**}$$

نستفيد من ** في * لنحصل من ذلك على:

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1 \ , \ \forall\, x \in I = \mathbb{R}$$

ومنهُ:

$$M_n = \sup_{x \in I = \mathbb{R}} \{|f_n(x)-f(x)|\} = \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall\, n \geq 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in I = \mathbb{R}} \{|f_n(x)-f(x)|\} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

وهذا يعني أن متتالية التوابع المفروضة **متقاربة نقطياً وبانتظام** من التابع $f(x) = x^2$ على $I = \mathbb{R}$.

مثال(4): ادرس تقارب المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ بحيث

$$f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \quad , \quad x \in I = \mathbb{R}$$

الحل:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sin\frac{x}{n} = \sin 0 = 0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $f(x) = 0$ على $I = \mathbb{R}$.

لنرى فيما إذا كان تقاربها من تابع النهاية $f(x) = 0$ منتظم أم غير منتظم على $I = \mathbb{R}$؟

لنفرض جدلاً أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$ على $I = \mathbb{R}$.

لنأخذ العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، وبما أن المتتالية متقاربة بانتظام فيوجد من أجل العدد $\varepsilon = \frac{1}{2}$ عدد طبيعي $0 \neq N_0 = N_0\left(\frac{1}{2}\right)$ بحيث يتحقق:

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\sin\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\sin\frac{x}{n}\right| < \frac{1}{2}$$

من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من $I = \mathbb{R}$.

بالتالي السابق محقق من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0$ ومن أجل كُل النقاط $x_n = \frac{n\pi}{2}$ من $I = \mathbb{R}$.

أي:

$$\left|\sin\frac{\frac{n\pi}{2}}{n}\right| = \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 1 < \frac{1}{2}$$

لكن ما سبق مستحيل أن يكون صحيحاً لأن $\frac{1}{2} \not< 1$. بالتالي الفرض الجدلي خاطئ و متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً وليس بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$ على $I = \mathbb{R}$.

مُلاحظة إضافية هامة: إذا عُدنا للمثال الموجود في صـ 2 وقمنا بتعديل بسيط وهو بأن نأخذ $I = [0, +\infty[$ فنجد أن:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx+1} = \begin{cases} 1 & if \quad x = 0 \\ 0 & if \quad x > 0 \end{cases}$$

إن حدود المتتالية المفروضة $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ عبارة عن توابع مستمرة على $I = [0, +\infty[$ لكُل $n \geq 1$

لكن تابع النهاية لها أي $f(x)$ غير مستمر على $I = [0, +\infty[$ لأنهُ غير مستمر(منقطع) عند $x = 0$.

من هُنا نستنتج "استناداً للنتيجة الأولى من بداية المحاضرة السابقة" أن متتالية التوابع $\left\{\frac{1}{nx+1}\right\}_{n\geq1}$ ليست متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على $I = [0, +\infty[$.

انتهت المحاضرة السابعة