ℓ^∞ فضاء غير فصول ..

هو فضاء المتتاليات المحدودة ..

هو كل متتالية فيه محدودة لكن
ليس بالضرورة أن نجد فيه مجموعة
أي هو غير محدود ..

البرهان:

يجب أن نجد هنا أن كل كثيف فيه غير معدودة..
أي لا نستطيع أن نجد معدودة وكثيفة...

البرهان:

لتكن المتتالية $x = (x_1, x_2, \ldots)$ حيث
عناصر المتتالية إما (0) أو (1)
ونقرن عناصر المتتالية بالتمثيل الثنائي

$$\text{ع} = \frac{x_1}{2^1}+\frac{x_2}{2^2}+\frac{x_3}{2^3}+\cdots$$

هذه متسلسلة جزئية من هندسية
وتمثل بين الـ 0 والـ 1 أي ضمن الساحة $[0,1]$
وأن $[0,1]$ هي ساحة غير معدودة
ولأن لكل عدد من ع له تمثيل وتمثيل واحد
فقط في $[0,1]$ والعكس صحيح أي
هذا يشكل لدينا تقابل وبالتالي المتتالية
غير معدودة
أي أصبح لدينا مجموعة غير معدودة من المتتاليات
التي عناصرها إما (0) أو (1)

وإن المسافة بين أي عنصرين مختلفين
في هذه المجموعة هي (1) ..

ملاحظة

إن المسافة في هذه المجموعة هي إذا كان العنصرين
مختلفين هي (1) وإذا العنصرين متطابقين أصبح (0)

وإذا أخذنا كل متتالية وجعلناها مركز
لكرة نصف قطرها أصغر من (1)
وليكن $(\frac{1}{2})$ مثلاً -
هذه الكرات لا تتقاطع لأن المسافة
بين أي عنصرين هي (1).

وليكن M مجموعة كثيفة في ℓ^∞
فإن كلاً من هذه الكرات الغير متقاطعة
سيحوي عنصراً من M وبالتالي M غير
معدودة ... ونحن أخترناها كثيفة
أصبحت في ℓ^∞ لا يوجد مجموعة كثيفة
ومعدودة ...

← ℓ^∞ غير فصول ..

ملاحظة

في الكتاب في هذه الفقرة مكتوب
بدلاً من هذه الكرات المتقاطعة
وهذا خطأ مطبعي لأنه الكرات
غير متقاطعة ..

* ℓ^p فضاء فصول...

إن الفضاء ℓ^p هو فضاء متتاليات بحيث

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

البرهان: ولذلك نأخذ المتتالية

$X = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n, 0, 0, \dots\}$

حيث $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n \in Q$ و $n \in N$

نلاحظ أن X معدودة

لماذا X معدودة؟! الشرح.

$(\eta_1, 0, 0, 0 \dots)$ هذه معدودة

لأنه يمكننا أن نجعلها تناظر N

$(\eta_1, \eta_2, 0, 0, 0 \dots)$

هذه أيضاً معدودة لأنها تمثل $Q \times Q$

$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_n, 0, 0, 0 \dots)$ أيضاً معدودة

لأن الجداء الديكارتي المنتهي لمعدودات هو

معدود. نثبت الآن أنها كثيفة. ليكن X عنصر

ما بحيث $X = (\xi_i) \in \ell^p$ وليكن $\varepsilon > 0$

بحيث: $\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$

لأن الباقي النوني لسلسلة متقاربة

ملاحظة: نذكر أن

$$\sum_{1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{n+1}^{\infty} a_n$$

متقاربة

$S = S_n + R_n$

$S = S + R_n \Rightarrow R_n = 0$

وبما أن مجموعة الأعداد العادية كثيفة في R

أي نستطيع إيجاد لكل ξ_i عنصر η_i قريب

منه بالقدر الذي نشاء

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

هو مقدار الذي نريده بالقدر الذي نشاء

حيث Y من $M \neq \emptyset$

مجموعة جزئية ممكنة جيدة كي يقترب بالقدر

الذي نشاء استطعنا إيجاد عنصر فيه الإشارة

حيث تكون أصغر من

لنوجد المسافة بين X و Y

$$[d(x,y)]^p = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p$$

$$< \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2}$$

$$< \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow d(x,y) < \varepsilon$$

وبالتالي M كثيفة في ℓ^p

وبالتالي ℓ^p فضاء فصول.

ملاحظة

$M = \bar{M}$

$$x \in \bar{M} \begin{cases} x \in M \\ x \in M' \end{cases}$$