جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

البنى الجبرية (1)

المحاضرة السادسة

تاريخ المحاضرة: 27/10/2015

مدرس المقرر: د. حمزة الحاكمي

أمثلة عن الزمـــــــر

$1-$ إن مجموعة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الجمع المعروفة هي زمرة. أي أن الثنائية $(\mathbb{Z},+)$ تشكل زمرة جمعية وتُسمى **بزمرة الأعداد الصحيحة** وهي زمرة تبديلية.

- إن مجموعة الأعداد الحقيقية بالنسبة لعملية الجمع المعروفة هي زمرة. أي أن الثنائية $(\mathbb{R},+)$ تشكل زمرة جمعية وتُسمى **بزمرة الأعداد الحقيقية** وهي زمرة تبديلية.

- إن مجموعة الأعداد المركبة بالنسبة لعملية جمع الأعداد المركبة هي زمرة. أي أن الثنائية $(\mathbb{C},+)$ تشكل زمرة جمعية وتُسمى **بزمرة الأعداد المركبة** وهي زمرة تبديلية.

$2-$ لنرمز بـِ $M_2(\mathbb{R})$ لمجموعة كُل المصفوفات الحقيقية المربعة من المرتبة (2). أي

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ ; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

عندئذٍ فإن المجموعة $M_2(\mathbb{R})$ بالنسبة لعملية جمع المصفوفات المعروفة هي زمرة جمعية وهي زمرة تبديلية.

(وظيفة): أثبت أن عملية ضرب المصفوفات المربعة هي عملية تجميعية.

$3-$ إن $\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية بدون الصفر بالنسبة لعملية الضرب المعروفة هي زمرة. أي أن الثنائية $\left(\mathbb{R}^*, .\right)$ تشكل زمرة ضربية وهي زمرة تبديلية.

$4-$ لنأخذ المجموعة

$$GL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ ; \ ad - bc \neq 0 \quad and \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

عندئذٍ فإن المجموعة $GL(2,\mathbb{R})$ بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات المعروفة هي زمرة ضربية.

$5-$ إن مجموعة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب المعروفة **ليست زمرة**. أي أن الثنائية $(\mathbb{Z}, .)$ لا تشكل زمرة ضربية لأن ليس لكُل عدد صحيح من $\mathbb{Z}$ مقلوب في $\mathbb{Z}$.

تنبيه: من الأن فصاعداً عندما نقول G زمرة فنقصد بذلك أن G زمرة ضربية إلا إذا أشرنا لغير ذلك.

تمهيدية(1): لتكن G زمرة. عندئذٍ أثبت أن

$1-$ المحايد في G وحيد.

$2-$ مقلوب أي عنصر في G وحيد.

$3-$ قانون الاختصار مُحقق. أي

$$\underbrace{\forall\, a,b,c \in G \ : \ a \cdot b = a \cdot c \ \Rightarrow b = c}_{\text{الاختصار من اليسار}}$$

$$\underbrace{\forall\, a,b,c \in G \;:\; a\cdot b = c\cdot b \;\Rightarrow a = c}_{\text{الاختصار من اليمين}}$$

4– آياً كان $a,b \in G$ كيفيين فإن

$$(a\cdot b)^{-1} = b^{-1}\cdot a^{-1}$$

تعميم: آياً كانت العناصر الكيفية $a_1,a_2,\dots,a_n \in G$ فإن

$$(a_1\cdot a_2\cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\cdot a_{n-1}^{-1}\cdots a_2^{-1}\cdot a_1^{-1}$$

البرهان:

1– لنفرض أن $e_1,e_2 \in G$ ، وأن كُلاً من e_1,e_2 حيادي في الزمرة G.

بما أن e_1 حيادي في الزمرة G فإنهُ من أجل أي عنصر $a \in G$ يتحقق

$$a\cdot e_1 = a$$

والأخير محقق من أجل جميع العناصر a بما فيها $a = e_2$ أي أن

$$e_2\cdot e_1 = e_2 \quad \dots(1)$$

بما أن e_2 حيادي في الزمرة G فإنهُ من أجل أي عنصر $a \in G$ يتحقق

$$e_2\cdot a = a$$

والأخير محقق من أجل جميع العناصر a بما فيها $a = e_1$ أي أن

$$e_2\cdot e_1 = e_1 \quad \dots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن $e_1 = e_2$.

2– لنفرض أن a عنصر كيفي من الزمرة G ، وأن كُلاً من $b,c \in G$ مقلوب للعنصر a.

$$b \text{ مقلوب للعنصر } a \;\Rightarrow a\cdot b = b\cdot a = e$$

$$c \text{ مقلوب للعنصر } a \;\Rightarrow a\cdot c = c\cdot a = e$$

$$b \underbrace{=}_{\text{لأن } e \text{ حيادي}} e\cdot b \underbrace{=}_{\text{لأن } c.a=e} (c\cdot a)\cdot b \underbrace{=}_{\text{العملية "." تجميعية}} c\cdot(a\cdot b) \underbrace{=}_{\text{لأن } a.b=e} c\cdot e \underbrace{=}_{\text{لأن } e \text{ حيادي}} c$$

$$\Rightarrow b = c$$

3– لنفرض أن a,b,c عناصر كيفية من الزمرة G ، وأن $a\cdot b = a\cdot c$

$$a\cdot b = a\cdot c \;\Rightarrow a^{-1}\cdot(a\cdot b) = a^{-1}\cdot(a\cdot c) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{العملية "." تجميعية}} (a^{-1}\cdot a)\cdot b = (a^{-1}\cdot a)\cdot c$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } a^{-1}.a=e} e\cdot b = e\cdot c \underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } e \text{ حيادي}} b = c$$ أي قانون الاختصار من اليسار مُحقق

وبنفس الطريقة نثبت على أن قانون الاختصار من اليمين مُحقق.

4– لنفرض أن a,b عنصرين كيفيين من الزمرة G.

$$a,b\in G \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بما أن } G \text{ زمرة ضربية} \\ \text{فإن } G \text{ مغلقة بالنسبة للعملية "}\cdot\text{"}}} \quad a\cdot b\in G$$

$$(a\cdot b)^{-1}\cdot(a\cdot b)=e \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{العملية "}\cdot\text{" تجميعية}} \quad ((a\cdot b)^{-1}\cdot a)\cdot b=e \Rightarrow \big(((a\cdot b)^{-1}\cdot a)\cdot b\big)\cdot b^{-1}=e\cdot b^{-1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{العملية "}\cdot\text{" تجميعية} \\ \text{و } e \text{ حيادي}}} \quad ((a\cdot b)^{-1}\cdot a)\cdot(b\cdot b^{-1})=b^{-1} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{b\cdot b^{-1}=e} \quad ((a\cdot b)^{-1}\cdot a)\cdot e=b^{-1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } e \text{ حيادي}} \quad (a\cdot b)^{-1}\cdot a=b^{-1} \Rightarrow ((a\cdot b)^{-1}\cdot a)\cdot a^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{العملية "}\cdot\text{" تجميعية}} \quad (a\cdot b)^{-1}\cdot(a\cdot a^{-1})=b^{-1}\cdot a^{-1} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{a\cdot a^{-1}=e} \quad (a\cdot b)^{-1}\cdot e=b^{-1}\cdot a^{-1} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } e \text{ حيادي}}$$

$(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}$ **وهو المطلوب**

تمهيدية(2): لتكن G زمرة ، $a\in G$ كيفي. عندئذٍ أثبت أن

$$(a^{-1})^{-1}=a$$

البرهان: بما أن $a\in G$ و G زمرة فيوجد $a^{-1}\in G$ ، وبما أن $a^{-1}\in G$ و G زمرة فيوجد $(a^{-1})^{-1}\in G$ بحيث:

$$(a^{-1})^{-1}\cdot a^{-1}=e \Rightarrow ((a^{-1})^{-1}\cdot a^{-1})\cdot a=e\cdot a \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{العملية "}\cdot\text{" تجميعية}} \quad (a^{-1})^{-1}\cdot(a^{-1}\cdot a)=e\cdot a$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{a^{-1}\cdot a=e \\ \text{و } e \text{ حيادي}}} \quad (a^{-1})^{-1}\cdot e=a \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } e \text{ حيادي}} \quad (a^{-1})^{-1}=a$$ **وهو المطلوب**

وهذا يعني أن مقلوب مقلوب أي عنصر في الزمرة G هو العنصر ذاتهُ.

الزمـــــر الجزئيـــة

تعريف: لتكن $(G,\cdot)$ زمرة ، ولتكن H مجموعة جزئية وغير خالية من G $(\phi \neq H \subseteq G)$. عندئذٍ نقول أن الثنائية $(H,\cdot)$ زمرة جزئية في أو من G إذا كانت $(H,\cdot)$ بحد ذاتها زمرة.

مبرهنة: لتكن G زمرة ، ولتكن H مجموعة جزئية وغير خالية من G. عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة

1- H زمرة جزئية في G.

2- H تُحقق الشرطين

أ) $\forall\, a,b \in H \;\Rightarrow\; a\cdot b \in H$ أي أن H مغلقة بالنسبة للعملية " $\cdot$ "

ب) $\forall\, c \in H \;\Rightarrow\; c^{-1} \in H$ أي لكل عنصر من H مقلوب في H بالنسبة للعملية " $\cdot$ "

3- H تُحقق الشرط

$$\forall\, a,b \in H \;\Rightarrow\; a\cdot b^{-1} \in H$$

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$: لنفرض أن H زمرة جزئية في الزمرة G الضربية وهذا يعني "استناداً للتعريف السابق" أن H زمرة ضربية بحد ذاتها أي أن " $\cdot$ " عملية ثنائية على H ومن ثم H مغلقة بالنسبة للعملية " $\cdot$ " أي أن الشرط (أ مُحقق ، و بما أن H زمرة (زمرة ضربية) فلكل عنصر مقلوب في H بالنسبة للعملية " $\cdot$ " وهذا يعني أن الشرط (ب مُحقق.

$2 \Leftarrow 3$: لنفرض أن $a,b \in H$ كيفيين ، ولنثبت أن $a\cdot b^{-1} \in H$.

$$a,b \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{استناداً للفرض من (2)} \\ \text{وخصوصاً الشرط (ب}}} a,b^{-1} \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{استناداً للفرض من (2)} \\ \text{وخصوصاً الشرط (أ}}} a\cdot b^{-1} \in H$$ **وهو المطلوب**

$3 \Leftarrow 1$: من فرضية المبرهنة لدينا $H \neq \phi$ وهذا يعني أن H تحوي عنصر واحد على الأقل وليكن $a \in H$.

$$a,a \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{استناداً للفرض من (3)}} a\cdot a^{-1} \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{a,a^{-1}\in H\subseteq G \\ a\cdot a^{-1}=e \ \text{و } G \text{ زمرة بالتالي}}} e \in H$$

وبما أن e هو المحايد في الزمرة G وأن $H \subseteq G$ فإن e سيلعب دور المحايد في H.

$$\forall\, a,b,c \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } H \text{ مجموعة جزئية من } G} a,b,c \in G \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بما أن } G \text{ زمرة فإن العملية "·"} \\ \text{تجميعية}}} (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

السطر الأخير يبين لنا أن العملية " $\cdot$ " هي عملية تجميعية على عناصر H.

آياً كان $a \in H$ ، وكون $e \in H$ فنجد "استناداً للفرض من (3)" أن:

$$a^{-1} \in H \quad \underbrace{\Rightarrow} \quad e \cdot a^{-1} \in H$$

وبما أن $a \in H \subseteq G$ زمرة G
فإن $a^{-1} \in G$ وكون e حيادي في G
فإن $e \cdot a^{-1} = a^{-1}$

وهذا يبين أن لكُل عنصر من H مقلوب في H بالنسبة للعملية " $\cdot$ "

$$a \cdot (b^{-1})^{-1} \in H \quad \underbrace{\Rightarrow} \quad a, b^{-1} \in H \quad \underbrace{\Rightarrow} \quad \forall\, a, b \in H$$

استناداً للفرض من (3)

أثبتنا في الخطوة السابقة
أن لكل عنصر من H مقلوب في H
وبالتالي $b^{-1} \in H$

$$a \cdot b \in H \quad \underbrace{\Rightarrow}$$

$b \in H \subseteq G$
وبما أن G زمرة
فإن $(b^{-1})^{-1} = b$ بحسب التمهيدية (2)

السطر الأخير يبين لنا أن H مغلقة بالنسبة للعملية " $\cdot$ " مما يعني أن العملية " $\cdot$ " هي عملية ثنائية على H.

النتيجة النهائية: إن العملية " $\cdot$ " هي عملية ثنائية على H ، وهي عملية تجميعية على عناصر H ، ويوجد في H عنصر محايد بالنسبة للعملية " $\cdot$ " وهو e ، ويوجد لكُل عنصر من H مقلوب في H بالنسبة للعملية " $\cdot$ " مما يعني " استناداً لتعريف الزمرة" أن $(H,\cdot)$ زمرة (زمرة ضربية) وهذا بدوره يعني أن $H \subseteq G$ زمرة جزئية في أو من الزمرة G.

وهو المطلوب.

أمثلـــــة وتماريـــن

مثال: لتكن G زمرة. عندئذٍ $H = \{e\}$ زمرة جزئية في G.

تمرين(1): لتكن G زمرة تبديلية. ولنفرض أن H هي المجموعة المؤلفة من عناصر G والتي مربعاتها هي المحايد في الزمرة G. أي

$$H = \{a \in G : \ a^2 = e\}$$

عندئذٍ أثبت أن H زمرة جزئية في G.

الإثبات: لإثبات أن H زمرة جزئية في G نستعين بالمبرهنة السابقة. من أجل ذلك يكفي إثبات أن $H \neq \phi$ وأنها جزئية من G ، وأن H تُحقق الشرط الثالث من شروط المبرهنة.

بما أن G زمرة فإن المحايد في الزمرة G بالنسبة للعملية " $\cdot$ " موجود في G أي $e \in G$.

$$e \in G \Rightarrow e \cdot e = e \quad \underbrace{\Rightarrow} \quad e^2 = e \quad \underbrace{\Rightarrow} \quad e \in H$$

كون G زمرة ضربية
فإن $e \cdot e = e^2$

استناداً لتعريف عناصر H

مما سبق نستنتج أن $H \neq \phi$ ، وواضح من تعريف عناصر المجموعة H أن H مجموعة جزئية من G.

لنفرض أن $x, y \in H$ كيفيين عندئذٍ نجد " بحسب تعريف عناصر H " أن

$$\underbrace{x^2 = e \quad and \quad y^2 = e}_{*}$$

$$\text{أصبح لدينا} \quad \left.\begin{matrix} y \in H \subseteq G \\ and \\ y^2 = e \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y \in G \\ and \\ y \cdot y = e \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة} \\ \text{فإنن نستنتج أن } y \text{ مقلوب نفسه}}} y = y^{-1} \quad \dots **$$

$$x, y^{-1} \in G \underbrace{\Rightarrow}_{\text{كون } G \text{ زمرة}} x \cdot y^{-1} \in G$$

$$(x \cdot y^{-1})^2 \underbrace{=}_{\text{كون } G \text{ زمرة ضربية}} (x \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot y^{-1}) \underbrace{=}_{\substack{\text{بما أن } G \text{ زمرة} \\ \text{فالعملية "·" تجميعية}}} x \cdot (y^{-1} \cdot x) \cdot y^{-1} \underbrace{=}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة} \\ \text{تبديلية فرضاً}}}$$

$$x \cdot (x \cdot y^{-1}) \cdot y^{-1} \underbrace{=}_{\substack{\text{بما أن } G \text{ زمرة} \\ \text{فالعملية "·" تجميعية}}} (x \cdot x) \cdot (y^{-1} \cdot y^{-1}) \underbrace{=}_{\text{كون } G \text{ زمرة ضربية}} x^2 \cdot (y^{-1})^2$$

$$\underbrace{=}_{\text{بالاستفادة من**}} x^2 \cdot y^2 \underbrace{=}_{\text{بالاستفادة من*}} e \cdot e = e \Rightarrow (x \cdot y^{-1})^2 = e \underbrace{\Rightarrow}_{\text{استناداً لتعريف عناصر } H} x \cdot y^{-1} \in H$$

أخذنا عنصرين كيفيين $x, y \in H$ و وجدنا أن $x \cdot y^{-1} \in H$

من كُل ما سبق نستنتج "استناداً للمبرهنة السابقة" أن H زمرة جزئية في G.

وهو المطلوب.

تمرين(2): لتكن لدينا زمرة الأعداد الصحيحة $(\mathbb{Z}, +)$ ، وليكن $n \geq 1$ عدد صحيح ، ولنعرف المجموعة

$$n.\mathbb{Z} = \{n.m \quad : \quad m \in \mathbb{Z}\}$$

عندئذٍ أثبت أن المجموعة $n.\mathbb{Z}$ تُشكل زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$.

الإثبات: لإثبات أن $n.\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ نستعين بالمبرهنة الأخيرة. من أجل ذلك يكفي إثبات أن $n.\mathbb{Z} \neq \phi$ وأنها جزئية من $\mathbb{Z}$ ، وأن $n.\mathbb{Z}$ تُحقق الشرط الثالث من شروط المبرهنة الأخيرة.

$$1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow n.1 \in n.\mathbb{Z} \Rightarrow n \in n.\mathbb{Z}$$

مما سبق نستنتج أن $n.\mathbb{Z} \neq \phi$ ، وواضح من تعريف عناصر المجموعة $n.\mathbb{Z}$ أن $n.\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$.

$$\forall\, x, y \in n.\mathbb{Z} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بحسب تعريف عناصر} \\ \text{المجموعة } n.\mathbb{Z}}} \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : \; x = n.\alpha \,, \; y = n.\beta \quad \dots *$$

$$\underbrace{x-y=}_{*\text{من}} n.\alpha-n.\beta \Rightarrow x-y=n.(\alpha-\beta) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}\ \text{وبالتالي} \\ m=\alpha-\beta\in\mathbb{Z}}} x-y=n.m \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بحسب تعريف عناصر} \\ \text{المجموعة}\ n.\mathbb{Z}}} x-y\in n.\mathbb{Z}$$

أخذنا عنصرين كيفيين $x,y\in n.\mathbb{Z}$ و وجدنا أن $x-y\in n.\mathbb{Z}$

من كُل ما سبق نستنتج "استناداً للمبرهنة الأخيرة" أن $n.\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Z}$ وبحيث $n\geq 1$.

وهو المطلوب. فإذا لم تستوعب ماذا فعلنا فاذهب واقرأ الملاحظة في الملحق أخر المحاضرة

تمهيدية: لتكن G زمرة ، وليكن $a\in G$ كيفي ، $n,m\in\mathbb{Z}$. عندئذٍ

1) $e^n=e$

2) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$

3) $(a^n)^m=a^{n.m}$

"تقبل دون برهان"

مُبرهنة: لتكن G زمرة ، ولتكن H مجموعة <u>جزئية</u> و <u>غير خالية</u> و <u>منتهية</u> من G. عندئذٍ فإن الشرط اللازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$\forall\ a,b\in H\ \Rightarrow\ a\cdot b\in H$$

البرهان:

$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{لزوم الشرط}}$ إذا فرضنا أن H زمرة جزئية في G فسنجد "استناداً للمبرهنة في صـ 5" أن الشرط (أ مُحقق والذي هو نفسهُ الشرط المطلوب.

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{كافية الشرط}}$ لنفرض أن الشرط المُعطى في نص المبرهنة مُحقق. أي

$$\underbrace{\forall\ a,b\in H\ \Rightarrow\ a\cdot b\in H}_{*}$$

ولنثبت أن H زمرة جزئية في G. من أجل ذلك نستعين بالمبرهنة الموجودة في صـ5.

بما أن $\phi\neq H\subseteq G$ فرضاً فيكفي إثبات أن H تُحقق الشرط الثالث من شروط تلك المبرهنة.

لنثبت أولاً أن:

$$\underbrace{\forall\ a\in H\ \Rightarrow\ a^{-1}\in H}_{**}$$

بما أن $H\neq\phi$ فيوجد عنصر واحد على الأقل وليكن a ينتمي إلى H. وهُنا نميز حالتين

1– إذا كان $a=e$ فإن $a^{-1}=e^{-1}=e$ أي $a^{-1}\in H$ وتكون ** محققة.

2– إذا كان $a\neq e$ فإن

$$a, a \in H \underbrace{\Rightarrow}_{*بحسب} a \cdot a \in H \Rightarrow a^2 \in H$$

$$a, a^2 \in H \underbrace{\Rightarrow}_{*بحسب} a \cdot a^2 \in H \Rightarrow a^3 \in H$$

$$\vdots$$

$$a, a^{n-1} \in H \underbrace{\Rightarrow}_{*بحسب} a \cdot a^{n-1} \in H \Rightarrow a^n \in H$$

$$\vdots$$

أي

$$a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots \in H$$

لكن بما أن H منتهية بالفرض فيوجد على الأقل $i, j \in \mathbb{N}^*$ بحيث $i \neq j$ وبحيث يتحقق

$$\underbrace{a^i = a^j}_{***}$$

بما أن $i \neq j$ فإنهُ إما $j > i$ أو $j < i$ فإذا فرضنا من دون المس بالعمومية أن $j < i$ فنجد أن

$$i - j > 0$$

إن $a^{i-j} \in H$ لأن $i - j > 0$ طبيعي.

$$a^i = a^{i-j+j} \Rightarrow a^i = a^{i-j} \cdot a^j \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{a^i \in H \subseteq G \\ \text{وبما أن } G \text{ زمرة فإن} \\ (a^i)^{-1} \text{ مقلوب } a^i \text{ في } G}} a^i \cdot (a^i)^{-1} = (a^{i-j} \cdot a^j) \cdot (a^i)^{-1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{G \text{ زمرة} \\ \text{أي العملية "·" تجميعية}}} e = a^{i-j} \cdot \left(a^j \cdot (a^i)^{-1}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بالاستفادة من} \\ ***}} e = a^{i-j} \cdot \left(a^i \cdot (a^i)^{-1}\right) \Rightarrow e = a^{i-j} \cdot e$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{e \text{ محايد في } G \\ \text{بالنسبة للعملية "·"}}} e = a^{i-j}$$

من الأخيرة وكون $a \neq e$ فإن $i - j \neq 1$.

$$\text{أصبح لدينا} \left.\begin{matrix} i - j > 0 \\ and \\ i - j \neq 1 \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } i,j \text{ أعداد طبيعية موجبة}} i - j > 1 \Rightarrow i - j - 1 > 0$$

من الأخيرة ينتج أن:

$$a^{i-j-1} \in H$$

$$e = a^{i-j} \Rightarrow e = a^{i-j-1+1} \Rightarrow e = a^{i-j-1} \cdot a \Rightarrow e \cdot a^{-1} = \left(a^{i-j-1} \cdot a\right) \cdot a^{-1}$$

$$\Rightarrow a^{-1} = a^{i-j-1} \cdot (a \cdot a^{-1}) \Rightarrow a^{-1} = a^{i-j-1} \cdot e \Rightarrow a^{-1} = a^{i-j-1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{لأن } a^{i-j-1} \in H} a^{-1} \in H$$

من كلا الحالتين نجد أنهُ أياً كان $a \in H$ فإن $a^{-1} \in H$. أي يوجد لكُل عنصر من H مقلوب في H بالنسبة للعملية " $\cdot$ "

$$\forall\, a,b \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{استناداً لما سبق}} a, b^{-1} \in H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالاستفادة من*}} a \cdot b^{-1} \in H$$

أخذنا عنصرين كيفيين $a,b \in H$ و وجدنا أن $a \cdot b^{-1} \in H$

من كُل ما تقدم نستنتج أن H زمرة جزئية في G **وهو المطلوب**.

مُلاحظة إضافية: المبرهنة المأخوذة في صـ 5 تم إعطاؤها على أن الزمرة G ضربية. وفي التمرين الثاني كانت الزمرة لدينا هي زمرة الأعداد الصحيحة والتي هي زمرة جمعية ومن أجل ذلك سوف أُقدم صياغة المبرهنة الموجودة في صـ 5 وذلك في حال كانت الزمرة G جمعية مع الإشارة إلى أن مُدرس المقرر لم يذكر هذا الأمر.

صياغة المبرهنة في حال كانت الزمرة G جمعية: لتكن G زمرة جمعية ، ولتكن H مجموعة جزئية وغير خالية من G. عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة

1– H زمرة جزئية في G.

2– H تُحقق الشرطين

أ) $\forall\, a,b \in H \Rightarrow a+b \in H$ أي أن H مغلقة بالنسبة للعملية " $+$ "

ب) $\forall\, c \in H \Rightarrow -c \in H$ أي لكل عنصر من H نظير في H بالنسبة للعملية " $+$ "

3– H تُحقق الشرط

$$\forall\, a,b \in H \Rightarrow a-b \in H$$

انتهت المحاضرة السادسة