جامعة دمشـــق

كليـة العلـــوم

قسـم الرياضيـات

السنـــة الدراسيـة الثانية

مقرر التحليـل 3

المحاضرة الأولى

تاريخ المحاضرة: 7/10/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

مراجعة من التحليل(1)

تعريف المتتالية العددية الحقيقية: نسمي أي تطبيق

$$a: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a(n)$$

منطلقه $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$ ومستقره مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بمتتالية عددية حقيقية.

ونرمز اختصاراً بِـ $a(n) = a_n$ لصورة العدد n من $\mathbb{N}^*$ وفق التطبيق a كما ونرمز لهذه المتتالية بالرمز:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{أو} \quad \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \quad \text{أو} \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \quad \text{أو} \quad \{a_n\}_{n\geq 1}$$

نسمي a_1 الحد الأول للمتتالية وa_2 الحد الثاني وa_n بالحد العام للمتتالية ونستطيع معرفة جميع حدود متتالية بمعرفة الحد العام لها.

أمثلة توضيحية بسيطة:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حقيقية حدها العام $a_n = \frac{1}{n}$ ومنهُ

$$a_1 = 1\,, a_2 = \frac{1}{2}\,, a_3 = \frac{1}{3}\,, \dots, a_n = \frac{1}{n}\,, \dots.$$

إن المتتالية السابقة تندرج ضمن المتتاليات الحسابية.

2) $\{2n-1\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حقيقية حدها العام $a_n = 2n-1$ ومنهُ

$$a_1 = 1\,, a_2 = 3\,, a_3 = 5\,, \dots, a_n = 2n-1\,, \dots.$$

تعريف المسلسلة العددية الحقيقية: لتكن لدينا المتتالية العددية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ والتي حدودها

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

ولنربط بين حدود هذه المتتالية بعملية الجمع فنحصل على المقدار:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

نسمي المقدار السابق متسلسلة عددية ، كما ونسمي a_1 بالحد الأول للمتسلسلة و a_2 حدها الثاني وa_n حدها العام.

نرمز للمتسلسلة السابقة بالرمز المختصر $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ أي أن:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

تعريف: لتكن لدينا المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

عندئذٍ نسمي مجموع الحدود الـ n الأولى بالمجموع الجزئي النوني لهذه المتسلسلة ونرمز لهُ بالرمز S_n أي أن:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

نسمي المتتالية $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ بمتتالية المجاميع الجزئية لتلك المتسلسلة ومن الواضح أن حدود هذه المتتالية هي:

$$S_1 = a_1 \,, S_2 = a_1 + a_2 \,, S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \,, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \,, \dots$$

تعريف: نقول عن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

أنها متقاربة إذا وفقط إذا كانت $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئية لها متقاربة إلى عدد حقيقي محدود S أي إذا كان

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \quad ; \quad S \in \mathbb{R}$$

وفي هذه الحالة نسمي S مجموع المتسلسلة ونكتب:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

أما إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة متباعدة فإننا نقول عن المتسلسلة أنها متباعدة وفي هذه الحالة لا يوجد لها مجموع.

مثال(1): برهن على أن المتسلسلة التالية متباعدة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

البرهان: لنشكل المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة المفروضة بحيث $n = 2^m$ فنجد

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

في الطرف الأيمن من S_{2^m} يمكن أن نكتب الحدود ابتداءً من الحد الثاني على شكل مجموعات عدد حدودها

$1,2,2^2,2^3,\dots,2^{m-1}$ حيثُ m هي ترتيب المجموعة أي S_{2^m} تصبح بالشكل:

$$S_{2^m}=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$

وإذا أخذنا من كل مجموعة أصغر حدودها وهو الحد الأخير وضربناه بعدد الحدود فيها نحصل على قيمة

أصغر من القيمة الحقيقية لمجموع عناصر المجموعة أي:

$$S_{2^m}>1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{8}\right)+8\left(\frac{1}{16}\right)+\cdots+2^{m-1}\left(\frac{1}{2^m}\right)=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{\text{مكررة}(m)\text{ مرة}}$$

$$=1+\frac{m}{2}\Rightarrow\quad S_{2^m}>1+\frac{m}{2}$$

الأن عندما $n\longrightarrow+\infty$ فإن $m\longrightarrow+\infty$ أي

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{m\to+\infty}S_{2^m}>\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$$

نستنتج مما سبق أن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المفروضة متباعدة مما يعني أن المتسلسلة متباعدة.

تسمى المتسلسلة السابقة بالمتسلسلة التوافقية وهي دائماً متباعدة

مثال(2): ادرس تقارب المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

الحل: لدراسة تقارب المتسلسلة المفروضة نشكل المجموع الجزئي النوني لها لكن قبل ذلك نفرق الكسر

بالشكل

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

الأن نعلم أن:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n \Rightarrow S_n \underbrace{=}_{\text{بالاستعانة بالتفريق الأخير}}$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}}$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=1 \Rightarrow S=1$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\left\{1-\frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}=\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المفروضة متقاربة من العدد المحدود $S=1$ وهذا بدوره يعني أن المتسلسلة المفروضة متقاربة والأكثر من ذلك مجموعها هو $S=1$.

- تذكرة بنوع خاص من المتسلسلات وهو **<u>المتسلسلات الهندسية</u>** التي لها الشكل العام التالي

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a.q^n=a+a.q+a.q^2+\cdots+a.q^n+\cdots \quad ; \quad a,q \text{ عددين حقيقيين}$$

نسمي a بالحد الأول للمتسلسلة الهندسية ، ونسمي q أساس المتسلسلة الهندسية.

دراسة تقارب المتسلسلة الهندسية: من أجل دراسة التقارب للمتسلسلة الهندسية نشكل المجموع الجزئي النوني لها ونعلم أن:

$$S_n=a+a.q+a.q^2+\cdots+a.q^n=a.(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^{n-1}) \Rightarrow$$

$$S_n=a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad ; \quad q\neq 1$$

وهنا نميز حالات:

1– إذا كان $|q|<1$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}=0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} a.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim_{n\to+\infty} q^{n+1}=\frac{a}{1-q}$$

أي في الحالة التي يكون فيها $|q| < 1$ فإن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية تكون متقاربة من عدد محدود $S = \frac{a}{1-q}$ ، وهذا بدوره يعني أن المتسلسلة الهندسية متقاربة في الحالة $|q| < 1$ والأكثر من ذلك مجموعها هو $S = \frac{a}{1-q}$.

2– في الحالة التي يكون فيها $|q| > 1$ فإن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية تكون متباعدة وهذا بدوره يعني أن المتسلسلة الهندسية متباعدة في الحالة $|q| > 1$ وليس لها مجموع.

تذكرة ببعض من الخواص الأساسية للمتسلسلات العددية

مبرهنة : إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقاربة فإن حدها العام a_n ينتهي إلى الصفر عندما تنتهي n إلى اللانهاية أي أن:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ متقاربة } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

أما العكس فهو ليس بالضرورة صحيح أي إذا كان $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ فليس من الضروري أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ متقاربة ومثال على العكس هو المتسلسلة التوافقية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

فلاحظ أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ لكن المتسلسلة التوافقية السابقة متباعدة وتم البرهان على ذلك سابقاً.

نتيجة: إذا كانت نهاية الحد العام a_n للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ لا يسعى إلى الصفر فإن المتسلسلة حتماً متباعدة.

مثال(1): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}$$

الحل: من الملاحظ أن

$$a_n = \frac{n}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب النتيجة السابقة}} \text{ المتسلسلة المفروضة متباعدة}$$

مثال(2): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n)$$

الحل: من الملاحظ أن الحد العام للمتسلسلة المفروضة هو $a_n = \sin(n)$ وأنهُ لا يسعى إلى نهاية معينة ومحدودة عندما تسعى n إلى اللانهاية وهذا بدوه يعني أن المتسلسلة المفروضة متباعدة.

تذكرة بمعايير أو اختبارات تقارب أو تباعد المتسلسلات

1– **اختبار المقارنة**: إذا كانت $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلتين كُل منهما ذات حدود موجبة أي

$$a_n > 0 \, , b_n > 0 \quad ; \quad \forall \, n \in \mathbb{N}^*$$

وإذا كان $a_n \leq b_n$ لكُل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن ما يلي محقق:

- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ متقاربة فإننا نحكم مباشرةً على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ أنها متقاربة.
- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعدة فإننا نحكم مباشرةً على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ أنها متباعدة.

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

الحل: إن الحد العام للمتسلسلة المفروضة هو $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ولدينا:

$$\sqrt{n} \leq n \quad ; \quad \forall \, n \in \mathbb{N}^* \ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad ; \quad \forall \, n \in \mathbb{N}^*$$

نضع $a_n = \frac{1}{n}$ لكُل $n \in \mathbb{N}^*$ وبالتالي أصبح لدينا:

$$\left. \begin{array}{c} a_n = \frac{1}{n} \leq b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \forall \, n \in \mathbb{N}^* \\ and \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ \text{متسلسلة توافقية ونعلم أنها متباعدة} \end{array} \right\} \underset{\text{بحسب اختبار المقارنة}}{\Rightarrow} \text{المتسلسلة المفروضة متباعدة}$$

2– **اختبار نهاية النسبة (أو قاعدة المقارنة)**: إذا كانت $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلتين كُل منهما ذات حدود موجبة أي

$$a_n > 0 \, , b_n > 0 \quad ; \quad \forall \, n \in \mathbb{N}^*$$

وإذا كان:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=A \quad ;$$ A عدد حقيقي موجب غير معدوم

$A > 0$ حقيقي

فإن المتسلسلتين المفروضتين من طبيعة واحدة (نوع واحد) أي:

- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقاربة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ تكون متقاربة وبالعكس.
- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ تكون متباعدة وبالعكس.

3– معيار أو اختبار دالامبير أو يسمى باختبار النسبة: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود موجبة أي أن:

$$a_n > 0 \quad ; \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

ولنفرض أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=R \quad ;$$ R عدد حقيقي

عندئذٍ:

- عندما $R < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقاربة.
- عندما $R > 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعدة.
- عندما $R = 1$ فنحن أمام حالة شك أي لا يمكن من خلال اختبار دالامبير الحكم فيما إذا كانت المتسلسلة المفروضة متقاربة أم متباعدة.

4– معيار أو اختبار كوشي أو يسمى باختبار الجذر النوني:

لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود موجبة أي

$$a_n > 0 \quad ; \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

ولنفرض أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=R \quad ;$$ R عدد حقيقي

عندئذٍ:

- عندما $R < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقاربة.
- عندما $R > 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعدة.
- عندما $R = 1$ فنحن أمام حالة شك أي لا يمكن من خلال اختبار الجذر النوني الحكم فيما إذا كانت المتسلسلة المفروضة متقاربة أم متباعدة.

5– معيار أو اختبار راب:

لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود موجبة أي

$$a_n > 0 \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

ولنفرض أن:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R \quad ; \quad R \text{ عدد حقيقي}$$

عندئذٍ:

- عندما $R > 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقاربة.

- عندما $R < 1$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعدة.

- عندما $R = 1$ فنحن أمام حالة شك أي لا يمكن من خلال اختبار راب الحكم فيما إذا كانت المتسلسلة المفروضة متقاربة أم متباعدة.

مُلاحظة: في حال فشل اختبار دالامبير بالحكم فيما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أم متباعدة نقوم بتطبيق اختبار راب.

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

الحل: إن الحد العام للمتسلسلة المفروضة هو $a_n = \frac{1}{n^2}$ ، ولدراسة تقارب أو تباعد المتسلسلة المفروضة نطبق اختبار راب ومن أجل ذلك نشكل:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - 1\right] = n\left[\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right] = n\left[\frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2n+1}{n}$$

ومنهُ نجد أن:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2 > 1$$

ومن الأخيرة يتبين لنا أن المتسلسلة المفروضة متقاربة استناداً لاختبار راب.

انتهت المحاضرة الأولى
