Application of derivative in investigation of functions

Continuity and differentiability of function. Sufficient conditions of functions monotony. Darboux's theorem. Intervals of function monotony. Critical points. Extreme (minimum, maximum). Points of extreme. Necessary condition of extreme. Sufficient conditions of extreme. Plan of function investigation.

Relation between continuity and differentiability of function. *If a function is differentiable at some point, then it is a continuous function at this point. Contrary is invalid: a continuous function can have no derivative.*

Consequence. *If a function is discontinuous at some point, then it has no derivative in this point.*

Example The function $y = |x|$ (Fig.3) is continuous everywhere, but it has no derivative at $x = 0$, because a tangent of the graph at this point does not exist.

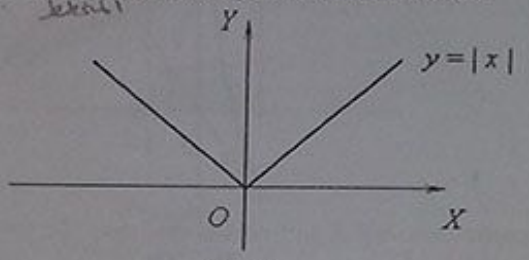


Fig. 3

Sufficient conditions of functions monotony.
If $f'(x) > 0$ at every point of an interval (a, b), then a function $f(x)$ increases within this interval.
If $f'(x) < 0$ at every point of an interval (a, b), then a function $f(x)$ decreases within this interval.

Darboux's theorem. Points, at which a derivative of a function is equal to 0 or doesn't exist, divide a function domain for such intervals that within each of them a derivative saves a constant sign.

Using these signs it is possible to find *intervals of monotony* of functions, what is very important in investigations of functions.

Example. Find intervals of monotony for the function $f(x) = 2x + x^{-2}$.

Solution. The function domain is $x \neq 0$; this can be written as union of the intervals: $(-\infty, 0)$ and $(0, +\infty)$;

$$f'(x) = 2 - 2x^{-3}, \text{ hence } f'(x) = 0 \text{ at } x = 1.$$

Points $x = 0$ and $x = 1$ divide the function domain into the three intervals: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, +\infty)$. According to Darboux's theorem $f'(x)$ saves a constant sign within each of these intervals (Fig 4a)

Scanned by CamScanner

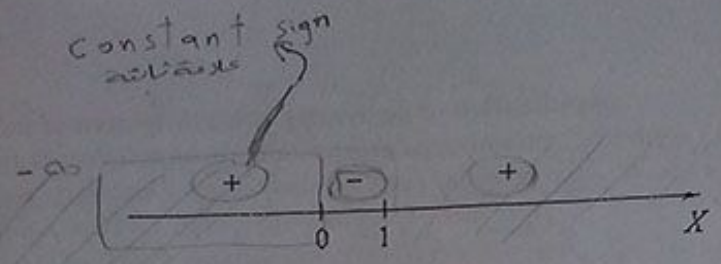


Fig. 4*a*.

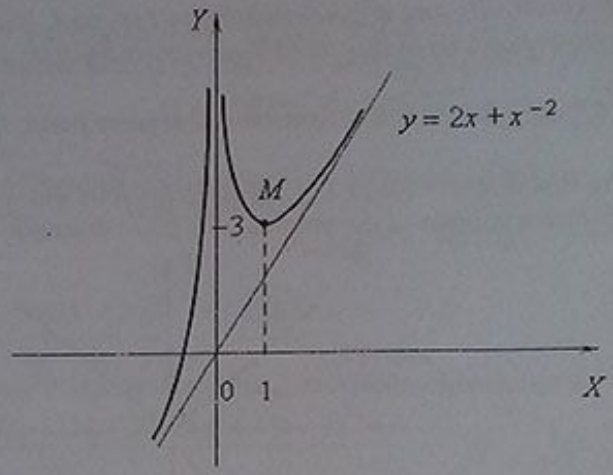


Fig. 4*b*.

Hence, the function increases in the intervals $(-\infty, 0)$ and $(1, +\infty)$ and decreases in the interval $(0, 1)$. The point $x = 0$ isn't included in the function domain, but as x approaches 0 an item x^{-2} increases unboundedly, therefore the function also increases unboundedly. At the point $x = 1$ the function value is 3. According to this analysis we can draw the graph of the function, represented on Fig.4*b*.

Critical points. A domain interior points, in which a derivative of a function is equal to zero or doesn't exist, are called *critical points* of this function. These points are very important at analysis and drawing a function graph, because only they can be points, in which a function has an *extreme* (*minimum* or *maximum*, Fig.5*a*, *b*).

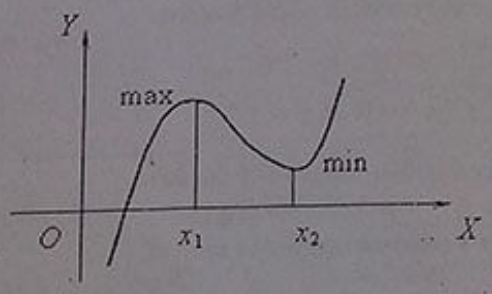


Fig. 5*a*

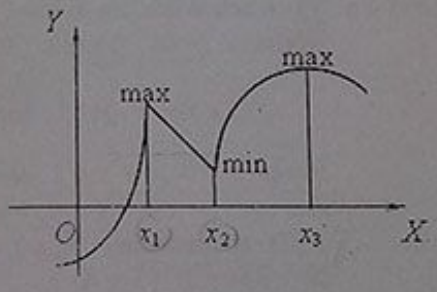


Fig. 5*b*

At points x_1, x_2 (Fig.5*a*) and x_3 (Fig.5*b*) a derivative is equal to 0; at points x_1, x_2 (Fig.5*b*) a derivative doesn't exist. But all they are points of extreme.

Scanned by CamScanner

Necessary condition of extreme. *If x_0 is an extreme point of a function $f(x)$ and a derivative f' exists at this point, then $f'(x_0) = 0$.*

This theorem is a *necessary* condition of extreme. If a derivative of a function at some point is equal to zero, then it's not necessarily, that the function has an extreme at this point. For instance, a derivative of the function $f(x) = x^3$ is equal to 0 at $x = 0$, but this function has no extreme at this point (Fig.6).

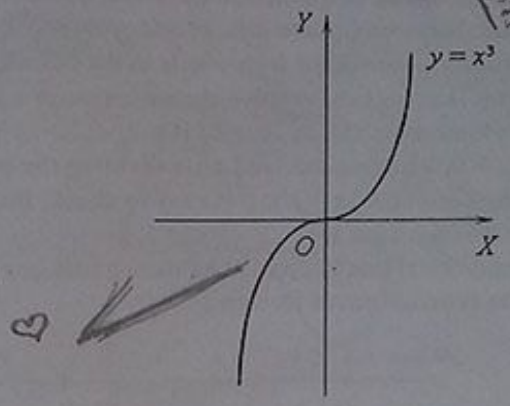


Fig. 6

On the other hand, the function $y = |x|$, represented on Fig.3, has a minimum at the point $x = 0$, but there is no derivative at this point.

Sufficient conditions of extreme. *If a derivative changes its sign from plus to minus at a point x_0, then x_0 is a point of maximum. If a derivative changes its sign from minus to plus at a point x_0, then x_0 is a point of minimum.*

Plan of function investigation. To draw a graph of a function it is necessary:

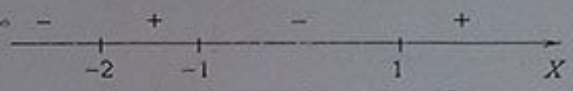
1. to find a domain and a codomain of a function,
2. to ascertain if the function is even or odd,
3. to determine if the function is periodic or not,
4. to find zeros of the function and its values at $x = 0$,
5. to find intervals of a sign constancy,
6. to find intervals of monotony,
7. to find points of extreme and values of a function in these points,
8. to analyze the behavior of a function near "special" points and at a great modulus of x .

Scanned by CamScanner

Example. Analyze the function $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ and draw its graph.

Solution. We'll investigate the function by the above represented scheme.

1) a domain $x \in R$ (i.e. x – any real number); a codomain $y \in R$, because $f(x)$ is an odd degree polynomial;
2) $f(x)$ is neither an even nor an odd function (explain, please);
3) $f(x)$ is not a periodic function (prove this, please, yourself);
4) a graph of this function is intersected with y-axis in the point $(0, -2)$, because $f(0) = -2$; to find zeros of the function it is necessary to solve the equation: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, one of roots of which ($x = 1$) is obvious. Other roots can be found (if they exist !) by solving the quadratic equation: $x^2 + 3x + 2 = 0$, which is received after dividing the polynomial $x^3 + 2x^2 - x - 2$ by the binomial ($x - 1$). It is easy to check, that the two other roots are: $x_2 = -2$ and $x_3 = -1$. So, zeros of this function are: -2, -1 and 1.
5) It means, that a numerical line is divided by these roots into four intervals of a sign constancy, inside of which the function saves its sign :



This result can be received from the polynomial factorization:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

and estimating the product sign by the *method of intervals*

6) The derivative $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ has no points, at which it doesn't exist, therefore its domain is R (all real numbers); zeros of $f'(x)$ are roots of the equation: $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

These roots: $x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{28}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ The function has two critical points and three intervals of monotony:

$$(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}), (\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}) \text{ and } (\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty).$$

The received results are included in the following table:

x	$(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3})$	$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$	$(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3})$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	~0.631	↘	~−2.112	↗
		max		min	

Scanned by CamScanner

There are marked by arrows conclusions about increasing ↗ or decreasing ↘ of the function into the corresponding intervals. Now we have the complete information to draw the function graph (Fig.7).

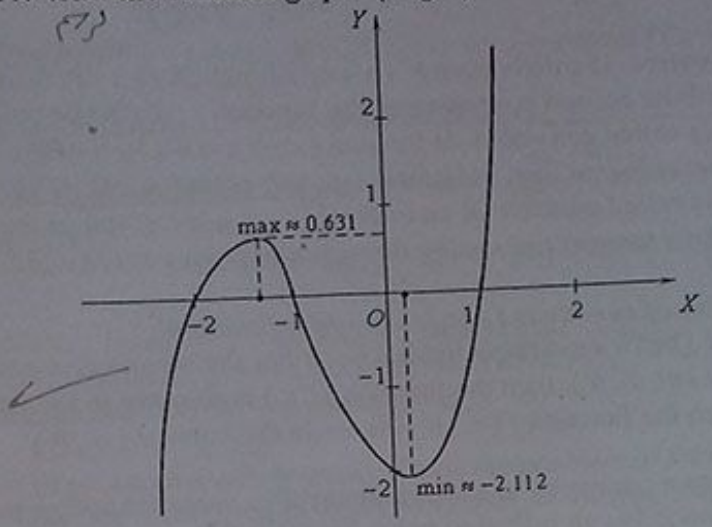


Fig 7

Scanned by CamScanner

تطبيقات المشتق في دراسة تغيرات الدوال

- الاستمرارية وقابلية تفاضل دالة. شروط كافية لاطراد الدالة. نظرية Darboux مجالات رتابة الدالة المطردة. النقاط الحرجة. القصوى (صغرى، عظمى). نقاط المنعطف. شروط لازمة لنقاط قصوى. شروط كافية لوجود نقاط قصوى. خطوط دراسة تغيرات الدالة.

* العلاقة بين الاستمرارية وقابلية اشتقاق الدالة: إذا كانت دالة قابلة لتفاضل عند نقطة ما عندها تكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة والعكس غير صحيح، أي دالة المستمرة ممكن أن لا تملك مشتق، النتيجة: الدالة غير مستمرة عند نقطة ما عندها لا تملك مشتق عند تلك النقطة.
مثال: للدالة $f(x)=|x|$ مستمرة في كل مكان لكنها لا تملك مشتق عند $x=0$ لأن المماس الخط البياني عند تلك النقطة غير موجود.

شروط كافية لاطراد دالة:
إذا كان $f'(x)>0$ عند كل نقطة من مجال (a,b) عندها الدالة $f(x)$ متزايدة ضمن ذلك المجال
" $f'(x)<0$ " " " " " (a,b) " " $f(x)$ متناقصة ضمن ذلك "

نظرية Darboux: النقاط التي يكون عندها مشتق دالة معدوماً أو غير موجود تقسم منطلق دالة للمجالات تحتفظ باشارة ثابتة.
باستخدام تلك الإشارة الثابتة نحصل إيجاد مجالات مطردة لدالة التي هي مهمة في دراسة تغيرات دالة.

مثال: أوجد مجالات اطراد الدالة $f(x)=2x+x^{-2}$

الحل: منطلق الدالة $x\neq 0$. يمكننا كتابته كاجتماع مجالين: $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$
$f'(x)=2-2x^{-3}$ وبالتالي $f'(x)=0$ عند $x=1$ للنقطتان $x=0$ و $x=1$ تقسم منطلق دالة إلى 3 مجالات $(-\infty,0)$ و $(0,1)$ و $(1,+\infty)$ وفقاً لنظرية $f(x)$ تحتفظ باشارة ثابتة في كل من تلك المجالات.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	

بالتالي دالة متزايدة في المجالين $(-\infty,0)$ و $(1,+\infty)$ ومتناقصة في المجال $(0,1)$
النقطة $x=0$ ليست ضمن منطلق الدالة. لكن عندما x تسعى إلى 0 الحد $x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ يزداد بشكل غير محدود ومنه الدالة أيضاً تزداد بشكل غير محدود، عند نقطة $x=1$ قيمة دالة هي 3 وفقاً لهذا التحليل يمكننا رسم الخط البياني لدالة الممثلة في Fig 4b.

النقاط الحرجة: نقاط المجال الداخلية التي يكون عندها المشتق معدوماً أو غير موجود تدعى بالنقاط الحرجة لدالة. هذه النقاط مهمة جداً تحليلاً وفي رسم الخط البياني لدالة لأنها النقطة الوحيدة لدالة التي يكون لها قيم قصوى (صغرى أو عظمى) Fig5a، Fig5b عند نقطتين x_1، x_2 في Fig5a و عند نقطة x_3 Fig5b مشتقها يساوي صفر عند نقطتين x_1، x_2 (Fig5b) مشتقها غير موجود لكن جميعها نقاط قصوى.

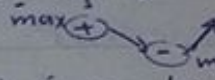
(7)

شروط المهمة للتعرف القصوى: إذا كانت x_0 نقطة قصوى للدالة $f(x)$ وقابلة للاشتقاق عند تلك النقطة عندها $f'(x_0)=0$.

هذه نظرية شرط ضروري لكي تكون قصوى. إذا كان مشتق دالة عند نقطة مساوي الصفر عندها ليس من ضروري أن تمثل الدالة (نقاط قصوى) عند تلك نقطة. على سبيل مثال مشتق دالة $f(x)=x^3$ يساوي 0 عند $x=0$ لكن هذه دالة ليس لها نقطة قصوى (max,min) عند تلك نقطة ($x=0$). Fig 6

من جهة أخرى: الدالة $y=|x|$ الممثلة في Fig 3 تمثل نقطة صغرى عند نقطة $x=0$ لكنها لا تمثل مشتق عند تلك نقاط.

شروط كافية لنقاط قصوى: إذا غير المشتق إشارته من + إلى - عند نقطة x_0 عندها x_0 هي نقطة عظمى. إذا غير مشتق إشارته من - إلى + عند نقطة x_0 عندها x_0 هي نقطة صغرى.



خطط لدراسة تغيرات الدالة. لرسم الخط البياني لدالة من ضروري: 1. إيجاد منطلق ومستمر دالة. 2. تأكد فيما إذا كانت دالة زوجية أم فردية. 3. تحديد فيما إذا كانت دالة دورية أم لا. 4. إيجاد أصفار (جذور) دالة وتميزها عند $x=0$. 5. إيجاد مجالات الإشارة ثابتة. 6. إيجاد مجالات مطردة. 7. إيجاد نقاط قصوى وقيم دالة عندها. 8. تحليل سلوك دالة قريبة من نقاط.

مثال: حلل دالة $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ ارسمها بيانياً.

الحل: سوف ندرس تغيرات الدالة وفقاً لمخطط الممثل في الأعلى.

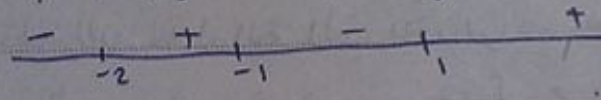
1) المنطلق $x\in\mathbb{R}$ (أي: أي عدد حقيقي) و مستمر لأن $y\in\mathbb{R}$ $f(x)$ كثير حدود من درجة مختلفة

2) $f(x)$ ليس زوجي ولا فردي (اشرح ذلك)؛

3) $f(x)$ ليست دالة دورية (اثبت ذلك لنفسك)؛

4) الخط البياني لدالة يتقاطع مع محور y في نقطة $(0,-2)$ لأن $f(0)=-2$ لإيجاد أصفار الدالة من ضروري حل المعادلة $x^3+2x^2-x-2=0$ واحد من الجذور الذي هو $(x-1)$ واضح. (الجذور الأخرى يمكن إيجادها (إذا كانت موجودة) بحل معادلة تربيعية $x^2+3x+2=0$ التي نصل إليها بعد تقسيم كثير الحدود x^3+2x^2-x-2 على صورية $(x-1)$. من السهل تحقق، إن جذرين هما $x_2=-2$ و $x_3=-1$ لذا أصفار هذه معادلة هي: -2، -1 و 1.

5) يمكن أن خط الأعداد يقسم بواسطة تلك جذور إلى 4 مجالات من إشارة ثابتة التي تحفظ الدالة داخلها على الإشارة.



هذه نتيجة توصلنا إلى تحليل كثير حدود:

$$x^3+2x^2-x-2=(x+2)(x+1)(x-1)$$

وتقدير إشارة جداء بطريقة مجالات.

ALADDIN net

~~المشتق $f'(x)=3x^2+4x-1$ لا يملك نقاط يكون عندها المشتق غير موجود وهنه المشتق~~
هو $\mathbb{R}$ (جميع أعداد حقيقية) أصفار $f'(x)$ هي جذور معادلة: $3x^2+4x-1=0$
هنه جذور $x_{1,2}: \frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ الدالة لها نقطتين حرجتين و3 مجالات وطردة

$$(-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3})(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3})(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, \infty)$$

وصلنا النتائج المتضمنة في جدول

x			
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

يرمز بالسهم للدلالة على زيادة أو نقصان الدالة المقابلة للمجالات. الآن نملك كامل معلومات لرسم ظرف الدالة

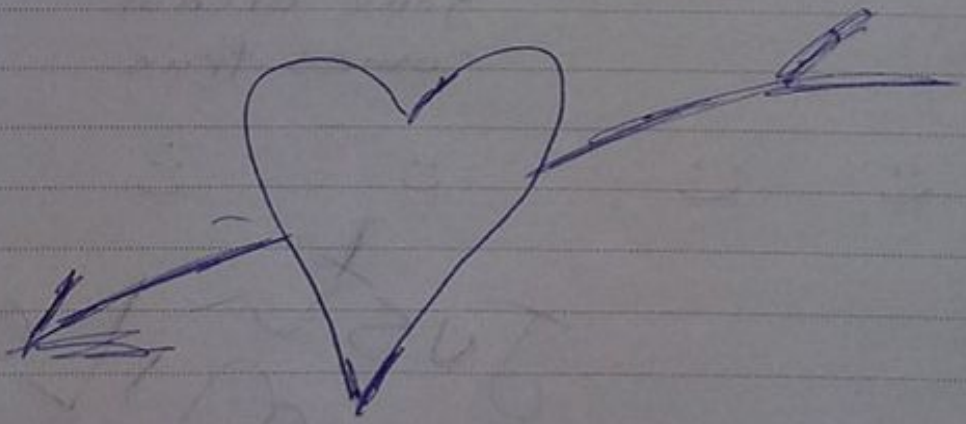
Fig (7)

☺ Good Luck ☺

by : Reem Al-Rahabi ♡

With my Love ♡

Hobe
And
happeiness
is Life



ALMDIB.net

Scanned by CamScanner

Convexity, concavity and inflexion points of a function

The second derivative. Convex and concave function.
Sufficient condition of concavity (convexity) of a function.
Inflexion point.

The second derivative. If a derivative $f'(x)$ of a function $f(x)$ is differentiable in the point (x_0), then its derivative is called the second derivative of the function $f(x)$ in the point (x_0) and denoted as $f''(x_0)$.

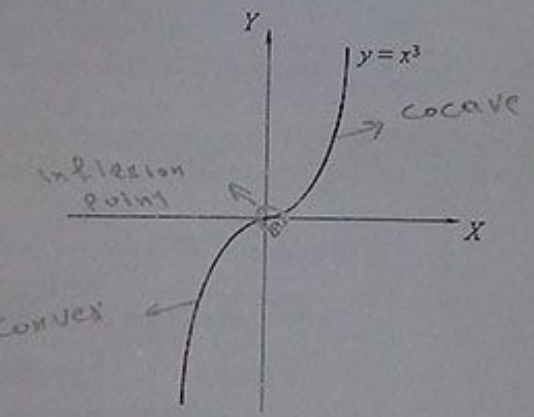
A function $f(x)$ is called *convex* in an interval (a, b), if a graph of the function $f(x)$ is placed in this interval *lower* than a tangent line, going through any point $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

A function $f(x)$ is called *concave* in an interval (a, b), if a graph of the function $f(x)$ is placed in this interval *higher* than a tangent line, going through any point $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$.

Sufficient condition of concavity (convexity) of a function.
Let a function $f(x)$ be twice differentiable (i.e. it has the *second* derivative) in an interval (a, b), then: if $f''(x) > 0$ for any $x \in (a, b)$, then the function $f(x)$ is *concave* in the interval (a, b); if $f''(x) < 0$ for any $x \in (a, b)$, then the function $f(x)$ is *convex* in the interval (a, b).

If a function changes a convexity to a concavity or vice versa at passage through some point, then this point is called *an inflexion point* an inflexion point. Hence it follows, that if the second derivative f'' exists in an inflexion point x_0, then $f''(x_0) = 0$.

E x a m p l e. Consider a graph of the function $y = x^3$:



This function is concave at $x > 0$ and convex at $x < 0$. In fact, $y'' = 6x$, but $6x > 0$ at $x > 0$ and $6x < 0$ at $x < 0$, hence, $y'' > 0$ at $x > 0$ and $y'' < 0$ at $x < 0$, hence it follows, that the function $y = x^3$ is concave at $x > 0$ and convex at $x < 0$. Then the point $x = 0$ is the inflexion point of the function $y = x^3$.

Scanned by CamScanner

كتب ، تقعر ، نقاط انعطاف الدالة .

- المشتق الثاني . كتب وتقعر دالة . شروط كافية (لتكتب) تقعر الدالة . نقطة انعطاف

المشتق الثاني إذا كان مشتق $f'(x)$ لدالة $f(x)$ قابل للاشتقاق عند نقطة x_0 عندها الاشتقاق يدعى المشتق الثاني لدالة $f(x)$ عند نقطة x_0 ويرمز له $f''(x_0)$.

تدعى دالة محدبة في مجال (a,b) إذا كان خط بياني لدالة $f(x)$ واقع ضمن هذه الفترة تحت خط المماس المار من أي نقطتين $(x_0, f(x_0))$ ، $x_0 \in (a,b)$.

تدعى دالة مقعرة في مجال (a,b) إذا كان الخط بياني لدالة $f(x)$ واقع ضمن هذه الفترة أعلى من المماس المار من أي نقطتين $(x_0, f(x_0))$ ، $x_0 \in (a,b)$

شروط كافية لكي لتقعر (كتب) دالة ،

لتكن دالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق مرتين (أي لها مشتقان) في مجال (a,b) عندها إذا كان $f''(x) > 0$ من أجل أي $x \in (a,b)$ عندها دالة مقعرة . في مجال (a,b) وإذا كان $f''(x) < 0$

" " " $x \in (a,b)$ " " مقعرة " " (a,b) .

إذا تغيرت الدالة من كتب لتقعر أو العكس صحيح عند مرور عبر نقطة ما عندها نقطة تدعى نقطة انعطاف . وبالتالي إذا كان مشتق ثاني موجود عند نقطة انعطاف x_0 عندها $f''(x_0) = 0$

مثال : ارسم خط بياني لدالة $y = x^3$.

هذه الدالة مقعرة عند $x > 0$ ومقعرة عند $x < 0$ في الحقيقة $y'' = 6x$ لكن $6x > 0$ عندما $x > 0$ و $6x < 0$ عند $x < 0$ بالتالي $y'' > 0$ عند $x > 0$ و $y'' < 0$ عند $x < 0$ بالتالي $y = x^3$ مقعرة عند $x > 0$ ومقعرة عند $x < 0$ والنقطة $x = 0$ هي نقطة انعطاف لدالة $y = x^3$

Good Luck

I wish for you
your dream
comes true

Just Smile

Scanned by CamScanner