WWW.facebook.com/primavira33

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

المعادلات التفاضلية (1)

المحاضرة الأولى

تاريخ المحاضرة: 5/10/2015

مدرس المقرر: د. خليل يحيى

مكتبة بريما فيرا – مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

سوف ندرس في هذا المقرر الفصول الآتية:

الفصل الأول: مفاهيم وتعاريف عامة

– تعريف المعادلة التفاضلية.

– تصنيف المعادلات التفاضلية.

– مرتبة المعادلة التفاضلية.

– درجة المعادلة التفاضلية.

– منشأ أو تشكيل المعادلات التفاضلية.

– تعريف الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية العادية.

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

أولاً: المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق

– المعادلات التفاضلية ذات المتحولات المنفصلة وطريقة إيجاد الحل العام لها.

– المعادلات التفاضلية التي ترد (تتحول) إلى منفصلة المتحولات.

– المعادلات التفاضلية المتجانسة وطريقة إيجاد الحل العام لها.

– المعادلات التفاضلية غير المتجانسة والتي ترد (تتحول) إلى متجانسة.

– المعادلات التفاضلية الخطية وطريقة إيجاد الحل العام لها.

– المعادلات التفاضلية غير الخطية و والتي ترد (تتحول) إلى خطية.

– المعادلات التفاضلية التامة وطريقة إيجاد الحل العام لها.

– المعادلات التفاضلية غير التامة وعوامل التكميل.

ثانياً: المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى وغير المحلولة بالنسبة للمشتق.

الفصل الثالث: المعادلات التفاضلية العادية من مراتب عليا (أعلى من المرتبة الأولى).

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

الفصل الأول: مفاهيم وتعاريف عامة

تعريف المعادلة التفاضلية: كُل علاقة تحتوي على تفاضلات أو مشتقات لتابع أو أكثر وذلك بالنسبة لمتحول مستقل أو أكثر تسمى معادلة تفاضلية.

تعريف للمعادلة التفاضلية بما يناسب المقرر: المعادلة التفاضلية هي كُل علاقة تربط بين التابع y والمتحول المستقل x ومشتقات التابع y بالنسبة للمتحول x. المشتقات مثل:

$$y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$$

- إن الشكل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة هو:

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad ; \quad y = y(x) \quad , \quad n \geq 1 \text{ عدد طبيعي}$$

وبحيث:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad , \quad y'' = \frac{d2y}{dx^2} \, , \dots . , y^{(n)} = \frac{dny}{dx^n}$$

تصنيف المعادلات التفاضلية:

1– كُل علاقة تحتوي على تفاضلات أو مشتقات عادية للتابع y $\left(\text{مثل } y' = \frac{dy}{dx}\right)$ تدعى معادلة تفاضلية عادية. **"المعادلات التفاضلية العادية هي التي سنهتم بدراستها في هذا المقرر"**

2– كُل علاقة بين التابع $z = z(x, y, \dots)$ والمتحولات المستقلة $x, y, \dots$ (متحولين أو أكثر) ومشتقات هذا التابع الجزئية بالنسبة للمتحولات المستقلة $x, y, \dots$ تدعى معادلة تفاضلية جزئية.

معلومة بسيطة: إذا كان z تابع بمتحولين x, y أي $z = z(x, y)$ عندئذٍ نرمز بـِ

$\frac{\partial z}{\partial y}$ المشتق الجزئي الأول للتابع z بالنسبة للمتحول y , $\frac{\partial z}{\partial x}$ المشتق الجزئي الأول للتابع z بالنسبة للمتحول x

$\frac{\partial 2z}{\partial y^2}$ المشتق الجزئي الثاني للتابع z بالنسبة للمتحول y , $\frac{\partial 2z}{\partial x^2}$ المشتق الجزئي الثاني للتابع z بالنسبة للمتحول x

$\frac{\partial 2z}{\partial y \partial x}$ المشتق الجزئي الأول للتابع $\frac{\partial z}{\partial x}$ بالنسبة للمتحول y , $\frac{\partial 2z}{\partial x \partial y}$ المشتق الجزئي الأول للتابع $\frac{\partial z}{\partial y}$ بالنسبة للمتحول x

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية هو $\phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial 2z}{\partial x^2}, \frac{\partial 2z}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$

"المعادلات التفاضلية الجزئية سوف نقوم بدراستها في مقرر المعادلات التفاضلية (2)"

تعريف مرتبة المعادلة التفاضلية: إن مرتبة المعادلة التفاضلية هي مرتبة أعلى مشتق موجود فيها.

مثال: إن المعادلة التفاضلية $xy'' + y' = x$ هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الثانية لأنها تحوي المشتق الثاني ولا تحوي مشتقات للتابع y من مرتبة أعلى من المرتبة الثانية.

تعريف درجة المعادلة التفاضلية: إن درجة المعادلة التفاضلية هي درجة (أس – قوة) أعلى مشتق موجود فيها.

أمثلة:

1– إن المعادلة التفاضلية

$$xy' + xy + y^2 = 0$$

هي معادلة تفاضلية عادية التابع المجهول فيها هو y والمتحول هو x ، وهي وضوحاً من المرتبة الأولى لأنها تحوي المشتق الأول للتابع y ولا تحوي مشتقات للتابع y من مرتبة أعلى من المرتبة الأولى أما بالنسبة لدرجتها فهي الأولى لأن درجة أو قوة y' في المعادلة المفروضة هي الواحد.

مع فهم التعريفين السابقين نقول مباشرةً: إن المعادلة التفاضلية السابقة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

2– إن المعادلة التفاضلية

$$xy'^2 + xy' + xy = 0$$

هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الثانية ، التابع المجهول فيها هو y والمتحول هو x.

تعريف: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية العادية بالتابع المجهول y والمتحول x الآتية

$$\underbrace{F\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}\right) = 0}_{(1)} \quad ; \quad y = y(x) \quad , \quad n \geq 1 \text{ عدد طبيعي}$$

نقول عن الدالة $y = y(x)$ أنها حل للمعادلة التفاضلية (1) السابقة إذا تحولت المساواة إلى مطابقة بعبارة أُخرى إذا أوجدنا المشتقات $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x), \dots$ وعوضناها في المعادلة التفاضلية المفروضة فنحصل على مطابقة للطرف الأيسر منها مع الطرف الأيمن.

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$

مثال(1): أثبت أن الدالة $y = \tan(x)$ هي حل للمعادلة التفاضلية

$$y' - y.\tan(x) = 1$$

الإثبات: لدينا

$$y = \tan(x) \underset{\text{بالإشتقاق}}{\Rightarrow} y' = \frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2(x)$$

نعوض في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية المفروضة فنجد أن:

$$1 + \tan^2(x) - \tan(x).\tan(x) = 1 + \tan^2(x) - \tan^2(x) = 1$$

وإذا لاحظنا أن الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية المفروضة هو 1 فنجد أن الدالة $y = \tan(x)$ جعلت الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية مطابق للطرف الأيمن لها ، إذاً تلك الدالة تمثل حل للمعادلة المفروضة.

مثال(2): أثبت أن الدالة $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

وبحيث أن $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ثوابت اختيارية (من اختياري).

الإثبات: لدينا

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} \Rightarrow y' = -2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x} \Rightarrow y'' = 4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{-3x}$$

نعوض في الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية المفروضة فنجد أن:

$$4c_1e^{-2x} + 9c_2e^{-3x} + 5(-2c_1e^{-2x} - 3c_2e^{-3x}) + 6(c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}) =$$

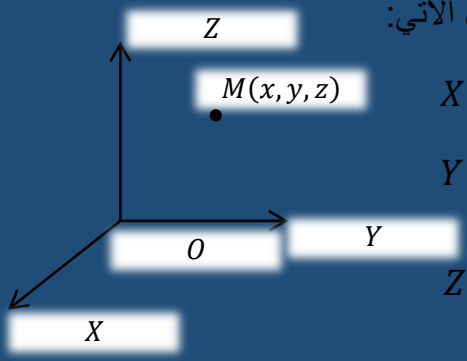
$$4c_1e^{-2x} + \mathbf{9c_2e^{-3x}} - 10c_1e^{-2x} - \mathbf{15c_2e^{-3x}} + 6c_1e^{-2x} + \mathbf{6c_2e^{-3x}} = \mathbf{0}$$

لاحظ أن الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية المفروضة هو 0 ومنه نجد أن الدالة $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$ جعلت الطرف الأيسر للمعادلة التفاضلية مساوٍ للطرف الأيمن لها ، إذاً تلك الدالة تمثل حل للمعادلة المفروضة.

منشأ المعادلات التفاضلية:

المنشأ الأول: هو منشأ هندسي حيث أن الخواص التي يحققها منحني ما من تقوس أو مماس أو ناظم يمكن التعبير عنها بمعادلات تفاضلية.

المنشأ الثاني: هو منشأ ميكانيكي حيث أن فروع الميكانيك من حركة وتحريك وتوازن مليئة بالمعادلات التفاضلية ، فإذا فرضنا أن نقطة مادية $M(x,y,z)$ تتحرك في جملة إحداثيات متعامدة $OXYZ$ وأن مركبات القوة F المؤثرة على تلك النقطة المادية معطاة بالشكل الآتي:



$$X \ : \ mx'' = 0$$

$$Y \ : \ my'' = 0$$

$$Z \ : \ mz'' = -mg \quad ; \quad \begin{matrix} m \text{ كتلة النقطة المادية} \\ g \text{ الجاذبية الأرضية} \end{matrix}$$

فنستطيع الحصول على معادلات حركة النقطة المادية بمكاملة العلاقات السابقة مرتين بالنسبة للزمن t كما يلي:

$$mx'' = 0 \Rightarrow mx' = C_1 \ \Rightarrow mx = C_1 t + C_2 \ \Rightarrow \underbrace{x = \frac{C_1}{m}t + \frac{C_2}{m}}_{(1)} \quad ; \quad C_1, C_2 \text{ ثوابت اختيارية}$$

$$my'' = 0 \Rightarrow my' = C_3 \ \Rightarrow my = C_3 t + C_4 \ \Rightarrow \underbrace{y = \frac{C_3}{m}t + \frac{C_4}{m}}_{(2)} \quad ; \quad C_3, C_4 \text{ ثوابت اختيارية}$$

$$mz'' = -mg \Rightarrow mz' = -mgt + C_5 \ \Rightarrow mz = -\frac{mg}{2}t^2 + C_5 t + C_6 \Rightarrow$$

$$\underbrace{z = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{C_5}{m}t + \frac{C_6}{m}}_{(3)} \quad ; \quad C_5, C_6 \text{ ثوابت اختيارية}$$

إن (1) و (2) و (3) تمثل معادلات الحركة للنقطة المادية M بالنسبة للزمن t.

المنشأ الثالث: هو حذف الثوابت الاختيارية الموجودة في معادلة جبرية.

إن تشكيل المعادلة التفاضلية من معادلة جبرية تحتوي على ثابت اختياري أو أكثر هو إيجاد معادلة تفاضلية لا تحتوي على هذا الثابت ، ويتم ذلك باشتقاق المعادلة الجبرية بالنسبة للمتحول عدد من المرات مساوٍ لعدد الثوابت الموجودة في المعادلة الجبرية ومن ثم بعمليات رياضية بسيطة نقوم بحذف الثوابت لنحصل من ذلك على المعادلة التفاضلية المنشودة من المعادلة الجبرية المدروسة.

- إذا كانت المعادلة الجبرية تحتوي على ثابت واحد اختياري فإن المعادلة التفاضلية الناتجة سوف تكون من المرتبة الأولى ، وإذا كانت تحتوي على ثابتين اختياريين فإن المعادلة التفاضلية الناتجة سوف تكون من المرتبة الثانية ، وبشكل عام إذا كانت تحتوي على n ثابت اختياري فإن المعادلة التفاضلية الناتجة سوف تكون من المرتبة n.

مثال: لتكن لدينا العلاقة (المعادلة الجبرية) الآتية

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \quad ; \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \text{ ثوابت اختيارية}$$

أوجد المعادلة التفاضلية للتابع y المعطى كما سبق.

الحل: لدينا ثلاث ثوابت اختيارية وبالتالي نشتق ثلاث مرات بالنسبة للمتحول x فنجد أن:

$$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

$$y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$y''' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$$

ومن الملاحظ أن $y''' = y'$

والأخيرة لا تحتوي على أي ثابت من الثوابت الاختيارية وهي المعادلة التفاضلية للتابع y.

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية العادية: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة n بشكلها العام الآتي:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \quad ; \quad y = y(x)$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية السابقة هو كُل حل من الشكل:

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad ; \quad C_1, C_2, \dots, C_n \text{ ثوابت اختيارية عددها } n \text{ نفس مرتبة المعادلة التفاضلية}$$

أو من الشكل:

$$h(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad ; \quad C_1, C_2, \dots, C_n \text{ ثوابت اختيارية عددها } n \text{ نفس مرتبة المعادلة التفاضلية}$$

الشكل الأول هو حل ظاهري أي نستطيع التعبير عن التابع y بدلالة المتحول x والثوابت.

الشكل الثاني هو حل ضمني أي لا نستطيع التعبير عن التابع y بدلالة المتحول x والثوابت.

أما الحل الخاص للمعادلة التفاضلية السابقة هو ذلك الحل الذي يحقق شروط معينة على التابع y.

انتهت المحاضرة الأولى

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$