جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

مقرر التحليل 3

المحاضرة الثالثة

تاريخ المحاضرة: 20/10/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

مثال: ادرس تقارب أو تباعد الجداء التالي

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+x^{2^n}\right) \quad ; \quad |x|<1$$

وأوجد قيمتهُ في حال تقاربه.

الحل: لدراسة تقارب أو تباعد الجداء الغير منتهي المفروض نشكل الجداء الجزئي النوني له ونعلم أن:

$$P_n=\prod_{k=0}^{k=n}\left(1+x^{2^k}\right)=\left(1+x^{2^0}\right).\left(1+x^{2^1}\right).\left(1+x^{2^2}\right).\left(1+x^{2^3}\right)\dots\left(1+x^{2^n}\right) \Rightarrow$$

$$P_n=(1+x).(1+x^2).(1+x^4).(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

من الفرض $|x|<1$ وبالتالي نستطيع أن نضرب طرفي المساواة الأخيرة بـِ $(1-x)$ فنجد أن:

$$(1-x)P_n=\underbrace{(1-x).(1+x)}_{\text{مطابقة فرق مربعي حدين}}.(1+x^2).(1+x^4).(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right) \Rightarrow$$

$$(1-x)P_n=\underbrace{(1-x^2).(1+x^2)}_{\text{مطابقة فرق مربعي حدين}}.(1+x^4).(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right) \Rightarrow$$

$$(1-x)P_n=\underbrace{(1-x^4).(1+x^4)}_{\text{مطابقة فرق مربعي حدين}}.(1+x^8)\dots\left(1+x^{2^n}\right)$$

وبتكرار نفس العملية نحصل على:

$$(1-x)P_n=\left(1-x^{2^n}\right)\left(1+x^{2^n}\right) \Rightarrow (1-x)P_n=1-x^{2^{n+1}} \Rightarrow P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}\lim_{n\to+\infty}x^{2^{n+1}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}(0)=\frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad P=\frac{1}{1-x}$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\{P_n\}_{n\geq 0}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء الغير منتهي المفروض متقاربة من مقدار محدود وغير معدوم $P=\frac{1}{1-x}$ وذلك من أجل أي قيمة لِـ x تحقق $|x|<1$ وهذا بدوره يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض متقارب والأكثر من ذلك قيمة ذلك الجداء هي $P=\frac{1}{1-x}$.

إضافي: استخدمنا في المثال السابق النهاية الآتية

$$\lim_{n\to+\infty}x^{2^{n+1}}=0 \quad ; \quad |x|<1$$

وهي صحيحة لأننا نعلم أن:

$$\lim_{m\to+\infty} x^m = 0 \quad ; \quad |x| < 1$$

وبالتالي إذا أجرينا التغيير $m = 2^{n+1}$ فنجد أنهُ عندما تسعى m لِـ اللانهاية فإن n تسعى لِـ اللانهاية أي

$$\lim_{n\to+\infty} x^{2^{n+1}} = \lim_{m\to+\infty} x^m = 0$$

تعريف: لنأخذ الجداء الغير منتهي الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = \left(\prod_{k=1}^{k=n} a_k\right).\left(\prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right) = P_n.\left(\prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$$

نسمي الجداء الغير منتهي الناتج عن الجداء المدروس بحذف الحدود الـ n الأولى بالباقي النوني للجداء الغير منتهي المدروس ونرمز لهُ بِـ π_n. أي

$$\pi_n = \prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

الخواص الأساسية للجداءات الغير منتهية

مُبرهنة$(\mathbf{1})$: يتقارب الجداء الغير منتهي الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = \left(\prod_{k=1}^{k=n} a_k\right).\left(\prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right) = P_n.\pi_n$$

إذا وفقط إذا تقارب الجداء الغير المنتهي الناتج عن حذف الحدود الـ n الأولى من الجداء المفروض أي إذا تقارب

$$\prod_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \pi_n$$

" تُقبل دون برهان "

مُبرهنة$(\mathbf{2})$: إذا كان الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب فإن الباقي النوني لهُ يُحقق

$$\lim_{n\to+\infty} \pi_n = 1$$

البرهان: إذا فرضنا أن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب فهذا يعني أن $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية لهُ تكون متقاربة من عدد حقيقي محدود وغير معدوم P أي

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P$$

وتكون قيمة ذلك الجداء هي P أي:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = P \Rightarrow P_n.\pi_n = P \Rightarrow \pi_n = \frac{P}{P_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \pi_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{P}{P_n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \pi_n = \frac{P}{P} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \pi_n = 1$$ وهو المطلوب

مبرهنة(3): إذا كان الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب فإن نهاية الحد العام لهُ تساوي الواحد. أي

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ متقارب } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

البرهان: بما أن الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب فرضاً فإن

$$\lim_{n\to+\infty} P_{n-1} = \lim_{n\to+\infty} P_n = P \quad ;$$ P عدد حقيقي محدود وغير معدوم

نعلم أن:

$$P_n = a_1.a_2 \dots a_n = (a_1.a_2 \dots a_{n-1}).a_n = P_{n-1}.a_n \Rightarrow a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} P_n}{\lim_{n\to+\infty} P_{n-1}} = \frac{1}{1} = 1$$ وهو المطلوب

- إن العكس للمبرهنة السابقة ليس من الضروري صحيح. أي إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$ فقد يكون الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب وقد يكون متباعد. ولتبيان صحة ذلك إليك المثال الآتي.

مثال: لنأخذ الجداء الغير منتهي الآتي

$$\prod_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

من الواضح أن $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ لكن الجداء المفروض متباعد وسبب ذلك هو

$$P_n = \prod_{k=0}^{k=n}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{1+1}{1}\right).\left(\frac{2+1}{2}\right).\left(\frac{3+1}{3}\right).\left(\frac{4+1}{4}\right)\dots\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1}\right).\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\dots\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}}$$

$$P_n = n+1$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(n+1) = +\infty$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية متباعدة مما يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض متباعد.

نتيجة من المبرهنة السابقة: إذا كانت $\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n \neq 1$ فإن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعد.

نتيجة ثانية من المبرهنة السابقة: إذا كان الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب فإن الحد العام لهُ يجب أن ينتهي إلى الواحد عندما تنتهي n إلى اللانهاية ، وبالتالي يجب أن تقع كل حدود الجداء تقريباً في أي جوار للواحد "على سبيل المثال $\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[$ ". وهذا يعني أنا جميع حدود الجداء المتقارب يجب أن تكون موجبة باستثناء عدد منتهي منها.

مبرهنة تبين العلاقة بين السلاسل الغير منتهية وبين الجداءات الغير منتهية

نص المبرهنة: الشرط اللازم والكافي ليتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)$.

الإثبات: لنأخذ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)$ ونعلم أن

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\ln(a_k) = \ln(a_1)+\ln(a_2)+\cdots+\ln(a_n) = \ln(a_1.a_2\ldots a_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{k=n} a_k\right) \Rightarrow$$

$$S_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{k=n} a_k\right) \quad \ldots(1)$$

ولنأخذ $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ ونعلم أن

$$P_n = \prod_{k=1}^{k=n} a_k \quad \ldots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$S_n = \ln(P_n) \quad and \quad P_n = e^{S_n}$$

$1-$ لنفرض أن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب إلى العدد الحقيقي المحدود وغير المعدوم P أي

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P_n = P$$

$$S_n = \ln(P_n) \Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\ln(P_n) \underset{\text{كون التابع اللوغارتمي مستمر فنستطيع إدخال النهاية}}{=} \ln\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} P_n\right) \underset{\text{بالاستفادة مما سبق}}{=} \ln(P)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \ln(P)$$

كون P عدد حقيقي محدود وغير معدوم فإن $\ln(P)$ هو عدد حقيقي محدود وبالتالي وجد $S=\ln(P)$ بحيث

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

وهذا يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)$ متقاربة والأكثر من ذلك مجموعها $S=\ln(P)$.

2− لنفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)$ متقاربة إلى العدد الحقيقي المحدود S أي

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

$$P_n = e^{S_n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} \underbrace{=}_{\text{كون التابع الأسي مستمر فنستطيع إدخال النهاية}} e^{\left(\lim_{n\to+\infty} S_n\right)} \underbrace{=}_{\text{بالاستفادة مما سبق}} e^S$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n = e^S$$

كون S عدد حقيقي محدود فإن e^S هو عدد حقيقي محدود وغير معدوم وبالتالي وجد $P=e^S$ بحيث

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P$$

وهذا يعني أن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقارب والأكثر من ذلك قيمتهُ $P=e^S$.

مما سبق نكون قد أثبتنا التكافؤ الآتي:

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n \ \text{متقارب} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{إذا وفقط إذا}} \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)\ \text{متقاربة}$$

ترميز: إذا كان لدينا الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ ، واستطعنا كتابة الحد العام لهُ بالشكل

$$a_n = 1 + b_n$$

بحيث $1+b_n>0$ أي $b_n>-1$ من أجل كُل $n\in\mathbb{N}^*$ فإن الجداء اللانهائي المدروس يكتب بالشكل

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$$

مُبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+b_n)$.

لم يقوم الدكتور بالبرهان ولم يطلب ذلك لكن ينتج البرهان من المبرهنة السابقة.

مُبرهنة: إذا كان لدينا الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ وكانت $b_n>0$ و $b_n<0$ ابتداءً من قيمة معينة للدليل n فإن:

الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

الإثبات:

- لنفرض أن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ متقارب وبالتالي "استناداً للمبرهنة (3)" نجد أن:

$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)=1 \Rightarrow 1+\lim_{n\to+\infty}b_n=1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}b_n=0$$

واستناداً للمبرهنة السابقة وكون الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ متقارب فرضاً فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}ln(1+b_n)$ متقاربة.

نعلم أن:

$$\lim_{n\to 0}\frac{ln(1+n)}{n}=1$$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(1+b_n)}{b_n}=1$$

وكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}ln(1+b_n)$ متقاربة "فحسب اختبار نهاية النسبة" تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ متقاربة أيضاً.

- لنفرض أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ متقاربة بالتالي $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ ونعلم أن $\lim_{n\to 0}\frac{ln(1+n)}{n}=1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\frac{ln(1+b_n)}{b_n}=1$ وكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ متقاربة "فحسب اختبار نهاية النسبة" تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+b_n)$ متقاربة أيضاً "واستناداً للمبرهنة السابقة" يكون الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ متقارب.

وهو المطلوب

مثال: ادرس تقارب أو تباعد الجداء التالي

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

وأوجد قيمتهُ في حال تقاربه.

الحل: لدراسة تقارب أو تباعد الجداء الغير منتهي المفروض نشكل الجداء الجزئي النوني له ونعلم أن:

$$P_n=\prod_{k=2}^{k=n}\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)=\prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\left(\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k+1}\right).\left(\prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)\underset{\text{بالتعويض}}{=}$$

$$\left(\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}.\dots\frac{n-3}{n-1}.\frac{n-2}{n}.\frac{n-1}{n+1}\right).\left(\frac{7}{3}.\frac{13}{7}.\frac{21}{13}.\frac{31}{21}\dots\frac{n^2-3n+3}{n^2-5n+7}.\frac{n^2-n+1}{n^2-3n+3}.\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}} \left(\frac{2}{n(n+1)}\right).\left(\frac{1}{3}(n^2+n+1)\right) \Rightarrow P_n = \frac{2}{3}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow P = \frac{2}{3}$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\{P_n\}_{n\geq 2}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء الغير منتهي المفروض متقاربة من العدد المحدود وغير المعدوم $P = \frac{2}{3}$ وهذا بدوره يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض متقارب والأكثر من ذلك قيمة ذلك الجداء هي $P = \frac{2}{3}$.

انتهت المحاضرة الثالثة