تمرين: مصعد في بناء مؤلف من عشرة طوابق فإذا بدأنا بالصعود به 7 أشخاص وافترضنا أنه يتوقف عند كل طابق. عين احتمال نزول كل من هؤلاء في طابق. (كل شخص منهم ينزل في طابق)

الحل:

نفرض A الحدث المطلوب. عندئذ.

لكل شخص ١٠ فرص من نزول وعدد أشخاص 7 وبالتالي فضاء العينة هو

$$|\Omega| = (10)^7 = 10\,000000$$

يجب ترتيب أشخاص 7 في كل طابق لذلك نأخذ ترتيب.

$$|A| = P^{10}_{7} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10!}{3!} = 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4 = 604800$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \approx 0.06$$

تمرين: خضع ربيع لامتحان وكان عليه أن يجيب عن عشرة من بين ١٣ سؤال المطلوب:

- كم عدد الاختيارات الممكنة.
- بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كان لابد أن يجيب عن أول سؤالين.
- كم عدد الاختيارات إذا كان من الضروري أن يجيب عن السؤال الأول أو الثاني وليس كلاهما.
- بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا ألزم بالإجابة عن ثلاثة أسئلة من بين الأسئلة الخمسة الأولى.
- " " " " " " " " " " " على الأقل " " " "

الحل: (1) عدد الاختيارات الممكنة:

مجموعة عناصرها أسئلة من أصل 13 $C^{13}_{10} = \frac{13!}{10!\cdot 3!} = 286$ اختيار

(2) لابد أن يجيب عن أول سؤالين وبالتالي عدد الطرق الممكنة هو عدد الطرق لاختياره ثمانية أسئلة من 11 سؤال أي: $C^{11}_{8} = \frac{11!}{8!\cdot 3!} = 165$ اختيار

(3) المرحلة الأولى اختيار أحد سؤالين الأول أو الثانية: $C^{2}_{1} = 2$

" الثانية " تسعة أسئلة من بين ١١ سؤال: $C^{11}_{9} = \frac{11!}{9!\cdot 2!} = 55$ اختيار

وبالتالي يكون عدد ~~طرق~~ الاختيار هو: $C^{2}_{1}\times C^{11}_{9} = 2\times 55 = 110$

(4) المرحلة الأولى اختيار 3 أسئلة من بين 5 أسئلة ⇐ $C^{5}_{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$ طرق

" الثانية " 7 أسئلة من بين 8 أسئلة ⇐ $C^{8}_{7} = 8$

وبالتالي عدد طرق ممكنة هو: $C^{5}_{3}\cdot C^{8}_{7} = 10\times 8 = 80$ طريقة اختيار

⑤ نعرض أن $H_1$ اختيار ربيع لـ 3 أسئلة من 5 أسئلة الأولى. ⇐ $|H_1| = C^5_3 \cdot C^3_7 = 80$

.. .. $H_2$ .. .. 4 .. .. من 5 .. .. . ⇐ $|H_2| = C^5_4 \cdot C^3_6 = 140$

.. .. $H_3$ .. .. 5 .. .. 5 .. .. . ⇐ $|H_3| = C^5_5 \cdot C^3_5 = 56$

ونعرض $H$ اختيار ربيع لـ 3 أسئلة على الأقل من بين 5 الأسئلة الأولى فيكون.

$$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$$

والأحداث $H_1, H_2, H_3$ متنافية مثنى مثنى وبالتالي:

$$|H| = |H_1| + |H_2| + |H_3|$$

$$|H| = 80 + 140 + 56 = 276 \text{ طريقة}$$

تمرين: توجد 10 نقاط $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ في المستوي بحيث لا يقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة والمطلوب: - كم عدد المستقيمات التي تحددها هذه المستقيمات العشر.

- كم مستقيماً لا يمر من نقط $M_1$ أو $M_2$.
- .. عدد المثلثات التي رؤوسها من هذه النقاط.
- .. مثلثاً يقبل النقطة $M_1$ أحد رؤوسه.
- .. .. .. الضلع $M_1M_2$ .. أضلاعه.

الحل: ① نعلم أن كل نقطتين تحددان مستقيماً وبالتالي عدد المستقيمات:

$$C^{10}_2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45 \text{ مستقيم.}$$

② $C^8_2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ مستقيم — لا نأخذ النقطتين $M_1$ و $M_2$

③ بما أنه لا توجد ثلاث نقط على استقامة واحدة وبالتالي فإن كل 3 نقاط تحدد مثلثاً.

$$C^{10}_3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120 \text{ مثلث}$$

④ عدد المثلثات التي تقبل النقطة $M_1$ أحد رؤوسه:

$$C^9_2 = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36 \text{ مثلث}$$ — ثبتنا أحد رؤوسه

⑤ عدد المثلثات التي تقبل الضلع $M_1M_2$ أحد ~~رؤوسه~~ أضلاعه:

$C^8_1 = 8$ مثلثات — ثبتنا نقطتين

## الفصل الثاني: مبحث الاحتمال الشرطي و الاستقلال الاحتمالي

### الاحتمال الشرطي:

تعريف: ليكن $(\Omega, F, P)$ فضاءً احتمالياً، وليكن A و B حدثين من F، وإذا علمنا أن $P(A)>0$ فإننا نعرّف الاحتمال الشرطي لوقوع B علماً أن A قد وقع بـ:

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} , \quad P(A)>0$$

← هذا ليس العرف [illegible] وإنما حدث B علماً أن A [illegible]

نتيجة:

$$P_A(B) = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A\cap B|}{|A|}$$

وأيضاً:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} , \quad P(B)>0$$

مبرهنة: إذا كان $(\Omega, F, P)$ فضاءً احتمالياً وكان $A \in F$ فإن الاحتمال المشروط بـ A يكون احتمالاً على F.

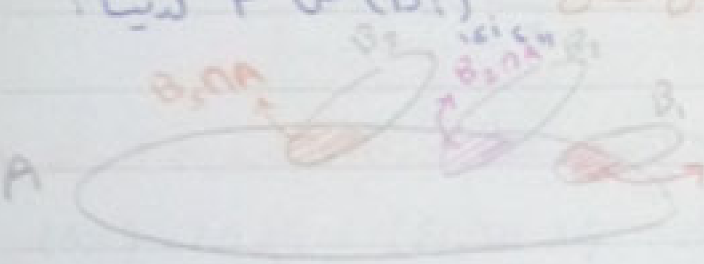
البرهان: لنبرهن $P_A : F \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شروط كولموغروف أي:

1) $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \geq 0 \quad \forall B \in F$

لأن $P(A\cap B) \geq 0$ و $P(A) > 0$.

2) $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A\cap\Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

3) من أجل متتالية معدودة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى $(B_i)$ من F لدينا:




$$P_A\left(\bigcup_{i=1} B_i\right) = \frac{P\left(A\cap\left(\bigcup B_i\right)\right)}{P(A)}$$

← توزيع تقاطع على اجتماع

$$= \frac{P\left(\bigcup_{i=1}(A\cap B_i)\right)}{P(A)}$$

ولكون $(B_i)_{i=1}$ متنافية مثنى مثنى فإن $(A\cap B_i)$ متنافية مثنى مثنى

$$\Rightarrow = \frac{\sum_{i=1} P(A\cap B_i)}{P(A)} = \sum_{i=1} \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}$$

$$= \sum_{i=1} P_A(B_i) \Rightarrow P_A\left(\bigcup_{i=1} B_i\right) = \sum_{i=1} P_A(B_i)$$

نتيجة: بما أن $P_A$ هو دالة احتمال فإنه يحقق كل خواص دالة الاحتمال. مثل:

$$P_A(B\cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_B(B\cap C)$$

وهكذا.

مثال: صنفنا ١٠٠ شخص وفقاً للجنس (ذكر، أنثى) ووفقاً للإصابة بمرض عمى الألوان (مصاب، غير مصاب) وكان لدينا نتائج التالية:

| | مصاب | غير مصاب | المجموع |
|---|---|---|---|
| ذكر | 2 | 58 | 60 |
| الأنثى | 1 | 39 | 40 |
| المجموع | 3 | 97 | 100 |

اخترنا عشوائياً شخصاً واحداً والمطلوب: ١) إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان ذكراً فما هو احتمال أن يكون مصاباً؟

2) إذا علمنا أن الشخص الذي تم اختياره كان مصاباً فما هو احتمال أن يكون ذكراً؟

الحل: نفرض A الحدث الدال على أن الشخص مصاب و B الحدث الدال على أن الشخص ذكر.

١) الحدث المطلوب $P_B(A) = ?$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30} \approx 0.03$$

أي عدد المصابين من ذكور عددهم (2)، وعدد B كلهم 60.

2) الحدث المطلوب $P_A(B) = ?$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3} \approx 0.6$$

أي عدد A عدد الأشخاص المصابين وكلهم 3.

* قاعدة الاحتمال المركب: نستنتج من التعريف للاحتمال الشرطي حيث لدينا:

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B) = P_A(B)\cdot P(A)$$

ولدينا أيضاً:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) = P_B(A)\cdot P(B)$$

إذن:

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P_B(A)\cdot P(B) = P_A(B)\cdot P(A) \quad *$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة من أجل متتالية الأحداث $(A_i)$:

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)}$$

قاعدة الاحتمال المركب التي يجب استخدامها في الاحتمال هي (*)

قاعدة الاحتمال المركب

$$P(A_1\cap[A_2\cap A_3]) = P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2\cap A_3)$$ لأن يتضمن (*)

$$= P(A_1)\cdot[P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\cap A_2}(A_3)]$$

مثال: صندوق يحوي n كرة زرقاء و m كرة سوداء. سحبنا على التالي كرتين وبدون إعادة
حيث احتمال حصول على كرتين سوداوين.

الحل: نفرض A الحدث الدال على أن الكرة الأولى سوداء و B الحدث الدال على أن الكرة
الثانية سوداء فيكون الحدث المطلوب $A\cap B$
وبالتالي حسب قاعدة احتمال المركب:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$$
$$= \frac{C_1^{m}}{|\Omega| = C_1^{m+n}} \cdot \frac{C_1^{m-1}}{C_1^{m+n-1}} \Big\} \text{توافيق}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

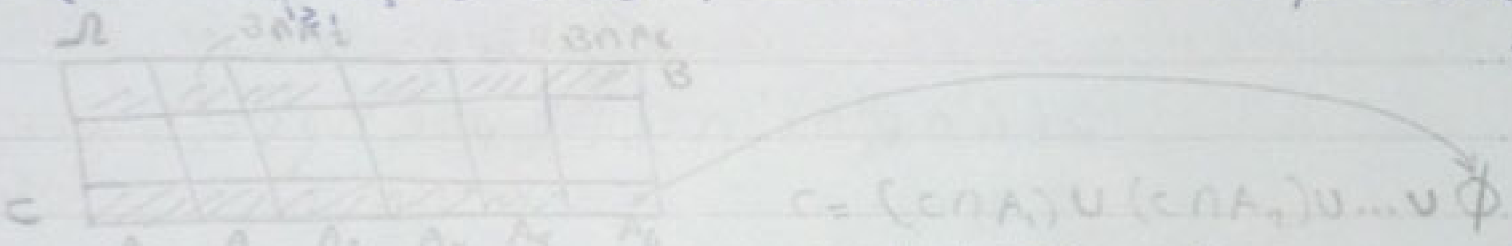
نتائج حول التجزئة:

نفرض أن $(A_i)$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد $\Omega$ (حيث $A_i$ متتالية من أحداث F) فإن:

1) $P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) \overset{\text{متنافية مثنى مثنى}}{=} \sum_{i\geq 1} P(A_i) = 1$

وتدعى هذه العلاقة بقاعدة الاحتمال الكلي.

2) إن أي تجزئة للحدث الأكيد $\Omega$ تؤدي إلى تجزئة لأي حدث متعلق بالتجزئة دائماً وإذا كانت $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة لـ $\Omega$ وكان B حدثاً متعلقاً بالتجزئة دائماً فإن $(B\cap A_i)$ تشكل تجزئة لـ B



أي أن: $B = B\cap\Omega = B\cap\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) = \bigcup_{i\geq 1}(B\cap A_i)$

وكون $(A_i)_{i\geq 1}$ متنافية مثنى مثنى فإن $B\cap A_i$ متنافية مثنى مثنى أيضاً ومنه

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i\geq 1}(B\cap A_i)\right) = \sum_{i\geq 1} P(B\cap A_i)$$

وبالتالي $(B\cap A_i)$ تشكل تجزئة لـ B المرتبط بـ $\Omega$.

دستور بايز: لتكن $(A_i)_{i\geq 1}$ تجزئة لـ $\Omega$ في الفضاء الاحتمالي $(\Omega, F, P)$ وليكن B حدثاً
مرتبطاً بهذه التجزئة فإن دستور بايز ينص على:

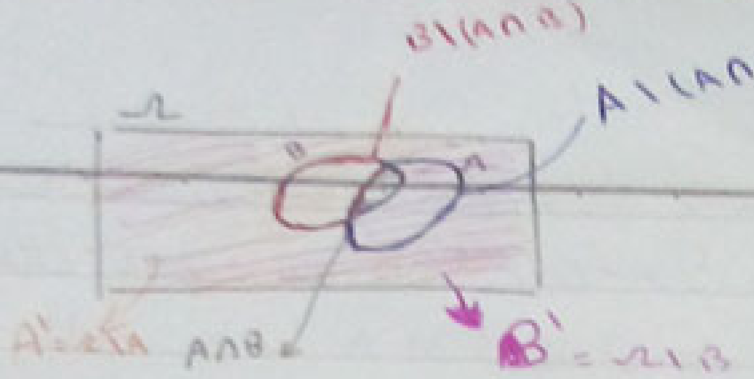
$$P_B(A_k) = \frac{P(A_k)\cdot P_{A_k}(B)}{\sum_{i\geq 1} P(A_i)\cdot P_{A_i}(B)}$$

k أحد عناصر التجزئة

من مهم كتابة دستور قبل التعويض

مثال: في دراسة لمحطة تلفزيونية حول نشرة الأخبار التي تعرضها. تم طرح سؤالين:
① هل تشاهد بانتظام نشرة الأخبار A؟ ② هل نشرة الأخبار مشابهة لنشرة أخبار أخرى في محطة
أخرى B؟ وكان لدينا نتائج التالية: $P(A)=0.40$ ، $P(B)=0.50$ ، $P(A\cap B)=0.24$

والمطلوب: $P_A(B)$ ، $P_{A'}(B)$ ، $P_{A'}(B')$




(c)

الحل: $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.24}{0.40} = 0.6$

$P_{A'}(B) = \dfrac{P(A'\cap B)}{P(A')}$ ~~$\dfrac{P(A'\cap B)}{1-P(A)}$~~

$= \dfrac{P(B\setminus(A\cap B))}{P(A')} = \dfrac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}$

$= \dfrac{0.50-0.24}{1-0.40} = \dfrac{0.26}{0.60} = 0.43$

$P_{A'}(B') = 1 - P_{A'}(B) = 1 - 0.43 = 0.57$ لأن $P_{A'}$ دالة احتمال فتحقق جميع خواصه

---

م.8      2015 / 11 / 3

تمرين: لدى شخص 500 جهاز إرسال تحوي 10 عاطلة عن العمل، بدأ بفحص الأجهزة جهازاً بعد جهاز، عيّن احتمال أن يجد الشخص 3 أجهزة صالحة للعمل ثم يليها جهاز عاطل عن العمل

الحل: نفرض $E_i$ حدث الدال على الحصول على جهاز عاطل عن العمل حيث $i = 1,2,3,4$ والحدث المطلوب

$\underbrace{E_1' \cap E_2' \cap E_3'}_{\text{3 صالحة}} \cap \underbrace{E_4}_{\text{عاطلة}}$

فحسب قاعدة الاحتمال يكون:

$P(E_1'\cap E_2'\cap E_3'\cap E_4) = P(E_1')\cdot P_{E_1'}(E_2')\cdot P_{E_1'\cap E_2'}(E_3')\cdot P_{E_1'\cap E_2'\cap E_3'}(E_4)$

$= \dfrac{490}{500}\cdot\dfrac{489}{499}\cdot\dfrac{488}{498}\cdot\dfrac{10}{497} = 0.019 \approx 0.02$

تمرين: موظفان يقومان بنسخ الرسائل على الآلة الكاتبة فإذا كان الموظف الأول ينسخ 80% من الرسائل و 90% من رسالة خالية من الأخطاء والموظف الثاني ينسخ 20% من الرسائل و 50% ~ ~ ~ ~ ~ ~ اختيرت عشوائياً إحدى الرسائل المنسوخة احسب احتمال أن تكون هذه ~~الرسالة~~ الرسالة خالية من الأخطاء وإذا كانت خالية من الأخطاء احسب احتمال أن تكون من الموظف الثاني النسخ.

الحل: لتكن $A_1$ الحدث الدال على أن الموظف الأول هو الذي نسخ الرسالة.

~ $A_2$ ~ ~ ~ ~ ~ الثاني ~ ~ ~ ~ ~

$B$ حدث دال على أن رسالة خالية من الأخطاء.

واضح أن $A_1 \cup A_2 = \Omega$ و أن $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

B حدث متعلق بالقرينة دائما وبالتالي: $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$$

وحسب قاعدة احتمال المركب:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B)$$

$$= (0.80)(0.90) + (0.20)(0.50)$$

$$\Rightarrow P(B) = 0.82$$

احتمال الرسالة خالية من الأخطاء:

وحسب دستور بايز:

$$P_B(A_2) = \frac{P(A_2) \cdot P_{A_2}(B)}{\sum_{i=1}^{2} P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{(0.20)(0.50)}{0.82}$$

$$\simeq 0.122$$

تمرين: يحوي كيس 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء ويحوي كيس آخر 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء سحبت كرتان من الكيس الأول ووضعتا في الكيس الثاني، سحبت بعد ذلك كرة من الكيس الثاني.

والمطلوب: أ) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء.

ب) استنتج من الطلب الأول احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

جـ) إذا علمت أن الكرة المسحوبة من الكيس الثاني سوداء، ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول من لونين مختلفين.


الحل: بفرض أن: $H_1$ الكرتان المسحوبتان من الكيس أول بيضاوتان.

$H_2$ الكرتان المسحوبتان من الكيس الأول سوداوان.

$H_3$ " " " " من لونين مختلفين.

$$P(H_1) = \frac{C_2^4}{C_2^7} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$P(H_2) = \frac{C_2^3}{C_2^7} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$$

$$P(H_3) = \frac{C_1^4 \cdot C_1^3}{C_2^7} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

نلاحظ أن: $P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$

أ) بفرض أن A الحدث الدال على سحب كرة سوداء من الكيس الثاني. وبالتالي:

/ /

باستخدام قاعدة الاحتمال المركب نجد:

$$P(A) = P(A\cap H_1) + P(A\cap H_2) + P(A\cap H_3)$$

$$= P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)$$

لكن:

$$P_{H_1}(A) = \frac{5}{10}\ ,\quad P_{H_2}(A) = \frac{7}{10}\ ,\quad P_{H_3}(A) = \frac{6}{10}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{10} + \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{10} + \frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10} = \frac{41}{70}$$

ب. الحدث المطلوب $A'$: $P(A') = 1 - P(A) = \frac{29}{70}$

جـ. حسب دستور بايز:

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)} = \frac{P(H_3\cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{41}{70}} = \frac{\frac{24}{70}}{\frac{41}{70}} = \frac{24}{41}$$

تمرين: لجنة مؤلفة من $4n$ أشخاص. نصفها ذكور والنصف الآخر إناث. اخترت امرأة من بين اللجنة بطريقة عشوائية، ثم اخترت بطريقة عشوائية من الباقي لجنة مؤلفة من $n$ شخصاً فإذا كانت اللجنة المختارة كلها من جنس واحد عين احتمال أن يكون كلهم ذكور.

الحل: نفرض $A$ الحدث الدال على أن الـ $n$ شخصاً ذكور.

$B$ " " " " " $n$ " إناث.

احتمال أن

وليكن $C$ يدل على كون الـ $n$ شخص من جنس واحد والحدث المطلوب هو $[A|C]$ مع.

حسب قاعدة الاحتمال المركب:

$$P(C) = P(A\cap C) + P(B\cap C)$$

$$= P(A)\cdot P_A(C) + P(B)\cdot P_B(C)$$

ولكن لدينا

$$P(A) = \frac{C_n^{2n}}{C_n^{4n-1}}$$

$$P(B) = \frac{C_n^{2n-1}}{C_n^{4n-1}}$$

$$P_A(C) = P_B(C) = 1$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{C_n^{2n}}{C_n^{4n-1}} + \frac{C_n^{2n-1}}{C_n^{4n-1}}$$

$$= \frac{C_n^{2n} + C_n^{2n-1}}{C_n^{4n-1}}$$

$$P_C(A) = \frac{P(A)\cdot P_A(C)}{P(C)}$$

$$= \frac{\frac{C^{2n}_n}{C^{4n-1}_n}}{\frac{C^{2n}_n + C^{2n-1}_n}{C^{4n-1}_n}} = \frac{C^{2n}_n}{C^{2n}_n + C^{2n-1}_n}$$

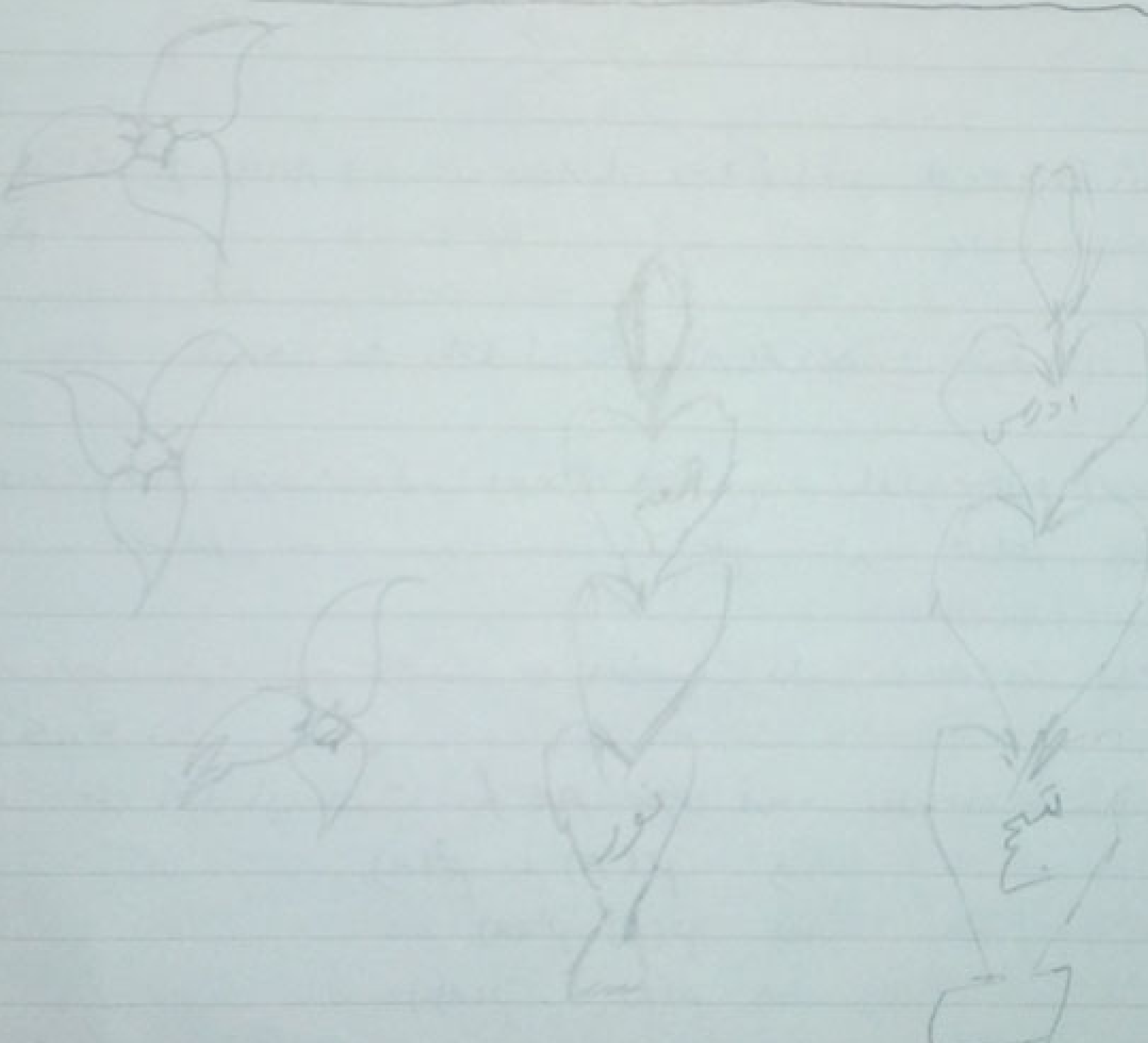
$$\Rightarrow P_C(A) = \frac{\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n=n!)}}{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!} + \frac{(2n-1)!\cdot n}{\underbrace{n!\,(n-1)!\cdot n}_{=n!\cdot n!}}}$$

$2n(2n-1)!$

$$\Rightarrow = \frac{2n!}{2n! + (2n-1)!\cdot n}$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)!}{2n(2n-1)! + (2n-1)!\cdot n}$$

$$= \frac{2n}{2n+n} = \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$$



تعريف (الاستقلال العشوائي): ليكن $(\Omega, f, P)$ فضاءاً احتمالياً.

1. ليكن A و B حدثين من $f$ نقول إنهما مستقلان عشوائياً إذا تحقق الشرط:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

2. إذا كان $A_1, A_2, A_3$ أحداث من $f$ نقول عن هذه الأحداث أنها مستقلة عشوائياً إذا تحقق الشرطان: أ. الأحداث $A_1$ و $A_2$ و $A_3$ مستقلة عشوائياً مثنى مثنى (كل متتالية جزئية من عنصرين)

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) \text{ - ب}$$

3. نقول عن متتالية $(A_i)_{i=1}^{n}$ من أحداث $f$ أنها مستقلة عشوائياً إذا تحقق شرطين:

a) كل متتالية جزئية منها من المرتبة $(n-1)$ مستقلة عشوائياً.

b) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

نتائج: 1) من تعريف الاستقلال العشوائي نجد أن $P_A(B) = P(B)$ و $P_B(A) = P(A)$

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$

و تكون A و B مستقلين $= P(A)\cdot P(B)$

2) إذا كان $A\cap B = \phi$ (حدثان متنافيان)، فليكونا مستقلان يجب أن يكون $P(A)=0$ أو $P(B)=0$

$P(A\cap B)=0$

إما $P(A)\cdot P(B)=0 \Rightarrow P(B)=0$

أو $P(A)=0$ أي يجب على الأقل أن يكون أحدهما حدث مستحيل

3) في حال تنافي الأحداث لدينا احتمال اجتماع يساوي مجموع الاحتمالات.

" " استقلال " " " تقاطع " جداء "

خواص الاستقلال العشوائي: 1) الأحداث المستقلة عن نفسها هي الأحداث المستحيلة أو الأكيدة فقط.

الإثبات: من أجل أي حدث $A\in f$ نفرض أنه مستقل عن نفسه أي $P(A\cap A)=P(A)\cdot P(A)$

$$\Rightarrow P(A) = P^2(A)$$

$$\Rightarrow P(A) - P^2(A) = 0$$

$$\Rightarrow P(A)(1-P(A)) = 0$$

إما $P(A)=0 \Rightarrow$ A حدث مستحيل

أو $1 - p(A) = 0 \Rightarrow p(A) = 1$

أي أن $A$ هو حدث أكيد.

2) إذا $\Omega$ و $\phi$ حدثان مستقلان عن أي حدث $A \in F$ حيث $0 < p(A) < 1$

الإثبات:

$$\left.\begin{aligned} p(A\cap\phi) &= p(\phi) = 0 \\ p(A)\cdot p(\phi) &= 0 \end{aligned}\right\} =$$

ومن مساواة علاقتين ينتج $p(A\cap\phi) = p(A)\cdot p(\phi)$ إذاً $\phi$ و $A$ مستقلان.

$$\left.\begin{aligned} p(A\cap\Omega) &= p(A) \\ p(A)\cdot p(\Omega) &= p(A)\cdot 1 = p(A) \end{aligned}\right\} =$$

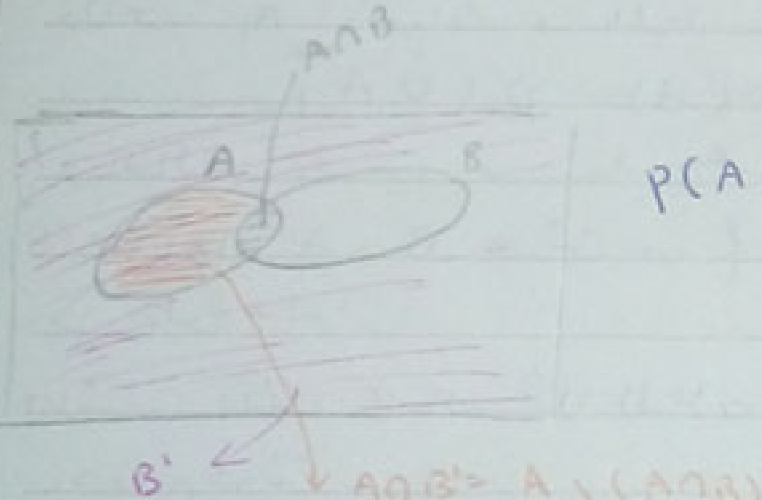
ومن مساواة علاقتين ينتج $p(A\cap\Omega) = p(A)\cdot p(\Omega)$ إذاً $\Omega$ و $A$ مستقلان.

3) إذا كان $A, B$ حدثين مستقلين من $f$ فإن

أ) $A$ و $B'$ مستقلان.

ب) $A'$ و $B$ مستقلان.

ج) $A'$ و $B'$ مستقلان.




الإثبات: أ)

$$\begin{aligned} p(A\cap B') &= p(A \setminus (A\cap B)) \\ &= p(A) - p(A\cap B) \\ &= p(A) - p(A)\cdot p(B) \\ &= p(A)\,[1 - p(B)] \\ &= p(A)\cdot p(B') \end{aligned}$$

ومنه $A$ و $B'$ مستقلان.

ب)

$$\begin{aligned} p(A'\cap B) &= p(B \setminus (A\cap B)) \\ &= p(B) - \underbrace{p(A\cap B)}_{p(A)\cdot p(B)} \\ &= p(B)\,[1 - p(A)] \\ &= p(B)\cdot p(A') \end{aligned}$$

بسبب الاستقلال

ج)

$$\begin{aligned} p(A'\cap B') &= p(A\cup B)' \\ &= 1 - p(A\cup B) \\ &= 1 - [p(A) + p(B) - p(A\cap B)] \\ &= [1 - p(A)] - p(B) + p(A)\cdot p(B) \\ &= p(A') - p(B)\,\underbrace{[1 - p(A)]}_{= p(A')} \\ &= p(A')\,[1 - p(B)] = p(A')\cdot p(B') \end{aligned}$$

4) إذا كانت المتتالية $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ من أحداث $f$ مستقلة فإن متتالية الحوادث المتممة لها

أي $(\bar{A}_i)_{1\leq i\leq n}$ ستكون مستقلة أيضاً. تعميم (3)

5) لتكن $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ متتالية من أحداث المتنافية مثنى مثنى من $f$ وإذا كانت الأحداث $B$ و $A_i$ مستقلة عشوائياً من أجل $1\leq i\leq n$، عندئذ يكون الحدثان $B$ و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ مستقلين عشوائياً.

الإثبات:

بتطبيق خاصية التوزيع على الاجتماع

$$p\left(B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = p\left[\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)\right]$$

بسبب تنافي الأحداث $A_i$ ينتج أن $(B\cap A_i)_{1\leq i\leq n}$ أيضاً أحداثاً متنافية.

$$= \sum_{i=1}^{n} p(B\cap A_i)$$

ولكون $A_i$ و $B$ مستقلة من أجل كل $1\leq i\leq n$،

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(B)}\cdot p(A_i)$$

مستقل عن $i$ لذلك يمكن إخراجه من مجموع

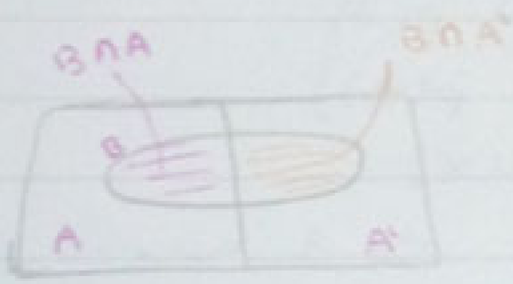
$$= p(B)\cdot\sum_{i=1}^{n}(p(A_i))$$

ولكون $A_i$ أحداث متنافية

$$= p(B)\cdot p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

وبالتالي الحدثين مستقلين عشوائياً..

6) من أجل $A$ و $B$ حدثين من $f$ وحققا الشرط: $p_A(B)=p_{\bar{A}}(B)$ عندئذ يكون: $A$ و $B$ مستقلين عشوائياً.




الإثبات: نكتب $B$ بالشكل التالي $B=(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)$

اجتماع لحدثين متنافيين

$$\Rightarrow \cancel{p(A)}\ p(B) = p(A\cap B)+p(\bar{A}\cap B)$$

حسب احتمال شرطي

$$= p(A)\cdot p_A(B) + p(\bar{A})\cdot p_{\bar{A}}(B)$$

ولدينا فرضاً $p_A(B)=p_{\bar{A}}(B)$ ومنه،

$$p(B) = p(A)\cdot p_A(B) + p(\bar{A})\cdot p_A(B)$$

$$= [p(A)+p(\bar{A})]\cdot p_A(B)$$

و $\bar{A}$ و $A$ متنافيان و $p(A\cup\bar{A})=1$

$$= 1\cdot p_A(B)$$

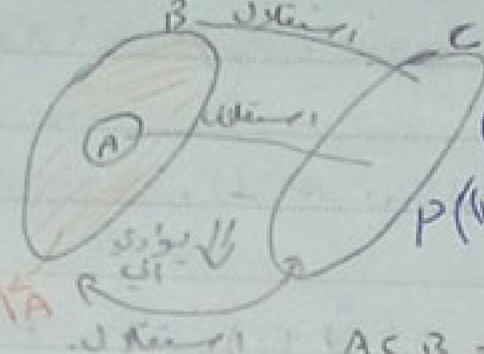
$$p(B) = p_A(B)$$

ومنه $A$ و $B$ مستقلان.

/ /

7) من أجل A و B و C أحداث من $f$ ولنفرض $A \subseteq B$ وكذلك A و C مستقلان عشوائياً عندئذ يكون C و $B\setminus A$ مستقلين.

ولنفرض B و C مستقلان عشوائياً،




الإثبات:

$(B\setminus A)\cap C = [(B\cap C)\setminus(A\cap C)]$

$P((B\setminus A)\cap C) = P[(B\cap C)\setminus(A\cap C)]$

$= P(B\cap C) - P(A\cap C)$

لأن $A\subseteq B \Rightarrow (A\cap C)\subseteq B\cap C$

وبسبب استقلال A و C و B و C

$= P(B)\cdot P(C) - P(A)\cdot P(C)$

$= P(C)\cdot[P(B) - P(A)]$

ولكون $A\subseteq B$

$= P(C)\cdot P(B\setminus A)$

وبالتالي حدثين مستقلين.

8) خاصة وتعريف: يكون الجبران $f_1$ و $f_2$ مستقلين عشوائياً إذا كان كل حدث من $f_1$ مستقل عن كل حدث من $f_2$.

جبران تامان على

مثلاً من أجل: $f_1 = \{\phi, \Omega, A, A'\}$

$f_2 = \{\phi, \Omega, B, B'\}$

جبران تامان على $\Omega$

فإن $f_1$ و $f_2$ جبران مستقلان إذا كان A و B مستقلين.

9) إذا كانت الأحداث $A_1$ —— $A_n$ مستقلة عشوائياً عندئذ تكون:

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)'$

$= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i')$ حسب دي مورغان

ولكون $A_i'$ مستقلة فإن $A_i$ مستقلة أيضاً

$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (P(A_i'))$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$

تمرين: يمكن لمؤشر داوجونز في بورصة نيويورك أن يزداد أو ينخفض يوماً فإذا كان احتمال الزيادة (0,50) في اليوم، خلال أربعة أيام عين احتمال أن يزداد مرة على ~~الأقل~~ أقل، علماً أن الزيادة أو النقصان هي حوادث مستقلة.

الحل: ليكن $E_i$ الحدث دال على زيادة المؤشر في اليوم $i=1,2,3,4$ والحدث المطلوب هو $\bigcup_{i=1}^{4} E_i$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)'$$
$$= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i'\right)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{4} P(E_i') \quad \text{بسبب الاستقلال}$$
$$= 1 - (0.50)^4 = 0.938$$

تمرين: إذا كان احتمال أن يصيب A الهدف 0.25 واحتمال أن يصيب B الهدف 0.40 فإذا أطلق كل من A و B نحو الهدف مرة واحدة عين احتمال

1) إصابة هدف.

2) عدم " " .

3) أصابة الهدف ~~[illegible]~~ من واحد فقط

الحل: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ولكن A و B مستقلين

$$= 0.25 + 0.40 - (0.25)(0.40)$$
$$= 0.65 - 0.10 = 0.55$$

2) $$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$$
$$= (0.75)(0.60)$$
$$= 0.45$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$

3) $$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)]$$

ولكنهما هنا متنافيان:

$$= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$
$$= P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B) \quad \text{بسبب الاستقلال}$$

$= (0.25)(0.60) + (0.75)(0.40)$
$= 0.15 + 0.3 = 0.45$

١٠ م      10 / 11 / 2015

تمرين:

إذا كان احتمال أن يصيب ثلاثة رجال هدفاً على الترتيب $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$، فإذا أطلق كل منهم على الهدف مرة واحدة. فالمطلوب: 1) جد احتمال أن يصيب الهدف رجل واحد منهم فقط.
2) إذا أصاب الهدف رجل واحد فقط جد احتمال الأول هو الذي أصاب الهدف.

الحل: ① ليكن A الحدث الدال على أن الرجل الأول هو الذي أصاب الهدف حيث $P(A)=\frac{1}{6}$

" " B " " " الثاني " " " " حيث $P(B)=\frac{1}{4}$

" " C " " " الثالث " " " " حيث $P(C)=\frac{1}{3}$

و الحدث المطلوب: $E = (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$

ولكون الأحداث متنافية ومستقلة.

$$\Rightarrow P(E) = P(A) \cdot P(B') \cdot P(C') + P(A') \cdot P(B) \cdot P(C') + P(A') \cdot P(B') \cdot P(C)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{31}{72} = 0.43$$

② الحدث المطلوب هو $P_E(A)$

$$\Rightarrow P_E(A) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap B' \cap C')}{P(E)}$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(B') \cdot P(C')}{P(E)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31} = 0.193$$

يكفي هنا جواب

تمرين: صنعت قطعة نقود بحيث يكون $P(H)=\frac{2}{3}$ و $P(T)=\frac{1}{3}$. ألقيت هذه القطعة مرة واحدة ويختار بعد ذلك عدد عشوائي من 1 إلى 9 إذا ظهرت الصورة ويختار عدد عشوائي من 1 إلى 5 إذا ظهرت الكتابة. عين احتمال أن يكون العدد المختار زوجياً.

الحل: ليكن A الحدث الدال على اختيار عدد زوجي وليكن $E_1$ الحدث الدال على اختيار عدد زوجي من 1 إلى 9 : {2 , 4 , 6 , 8} وليكن $E_2$ الحدث الدال على اختيار عدد زوجي من 1 إلى 5 : {2 , 4}

و الحدث المطلوب $A = (H \cap E_1) \cup (T \cap E_2)$

/ /

لكون حدثين متنافيين:

$$P(A) = P(H \cap E_1) + P(T \cap E_2)$$
$$= P(H) \cdot P(E_1) + P(T) \cdot P(E_2)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$$
$$= \frac{8}{27} + \frac{2}{15} = 0.429$$

## الفصل الثالث

## دراسة المتغيرات العشوائية.

تعريف المتغير العشوائي: ليكن $(\Omega, F, P)$ فضاء الاحتمال إن الدالة:

$$X : (\Omega, F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ هي جزئية من $F$ و $F$ هي مجموعة أحداث وهي جزئية من $\Omega$

تدعى متغيراً عشوائياً إذا حققت الشرط:

$$\forall B \subseteq \mathbb{R} \; ; X^{-1}(B) \in F$$

أي أن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وفق $X$ هي حدث من $F$ في $\Omega$ (مجموعة من عناصر $\Omega$)

- ولكل متغير عشوائي مجموعة من القيم نرمز لها بـ $R_X$.

ملاحظة: ١) إذا كان فضاء العينة منتهياً أو غير منتهياً لكنه قابل للعد (أو معدود) فنقول عن هذا الفضاء أنه فضاء منفطع (منفصل) والمتغير العشوائي المولد من هذا الفضاء يدعى متغيراً عشوائياً منتظماً. (غير المستمر).

2) إذا كان فضاء العينة غير منتهي وغير قابل للعد، فندعوه فضاء مستمراً والمتغير العشوائي المولد من هذا الفضاء يدعى متغيراً عشوائياً مستمراً (غير منقطع)

★ تذكير ببعض خواص الصورة العكسية:

إذا كان $X : E \longrightarrow F$ تطبيقاً وكانت المجموعة $B \subseteq F$ فإن

$$X^{-1}(B) := \{ x : x \in E \; , X(x) \in B \}$$

تدعى الصورة العكسية لـ $B$ وفق $X$ ونرمز لها أيضاً: $[X \in B]$ أي $X^{-1}(x) = [X \in x]$

ومن أهم خواص الصورة العكسية:

① $[X \in \bigcup_i B_i] = \bigcup_i [X \in B_i]$

② $[X \in \bigcap_i B_i] = \bigcap_i [X \in B_i]$

③ $[X \in B \setminus A] = [X \in B] \setminus [X \in A]$

④ $[X \in B'] = [X \in B]'$

⑤ $B \subseteq A \; . \; [X \in B] \subseteq [X \in A]$

⑥ $B \cap R_X = \phi \Rightarrow [X \in B] = \phi$