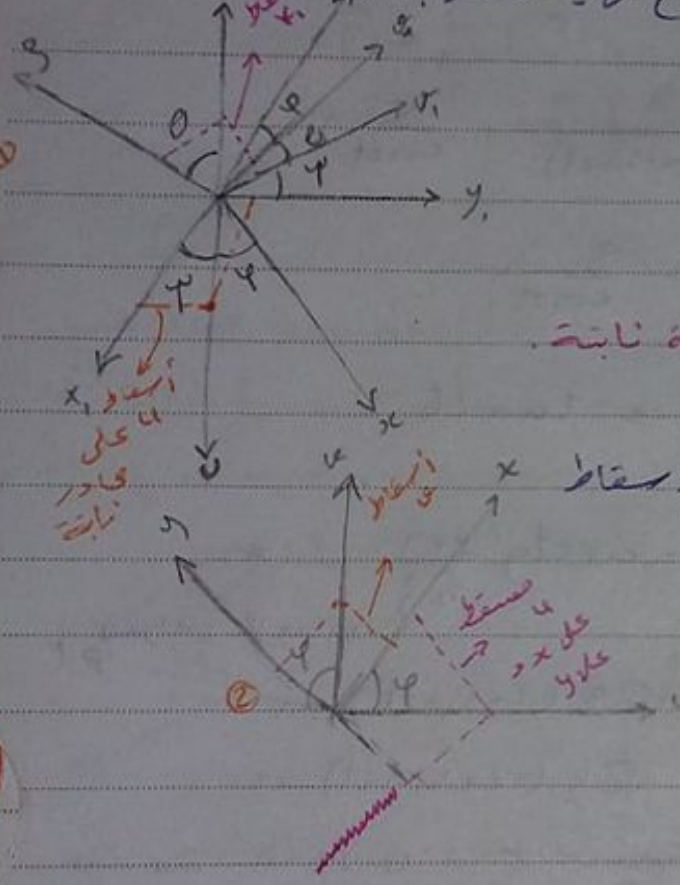
د. هدى ٢٠٠٦ 2015/11/11

يتحرك قضيب OA طوله $l$ في الفراغ بحيث تبقى نهايته O ثابتة تتعين حركته بنابضية زاوية أولر. $\varphi = t$ ، $\theta = 2t$ ، $\psi = \frac{\pi}{4}$ عين شعاع دوران الأنفي وشعاع تسارع دوران الانتقالي. ومنحرطي القاعدة والمتدرج وسرعة وتسارع نهاية القضيب A.




$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k}_1 + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \vec{k}_1 + 2\vec{u}$$

$\vec{k}_1$ جملة ثابتة — $\vec{u}$ في جملة ثابتة

$$\vec{\omega} = \vec{k}_1 + 2(\cos\varphi\,\vec{i}_1 + \sin\varphi\,\vec{j}_1)$$

$\vec{\omega}$ في جملة ثابتة $= 2\cos t\,\vec{i}_1 + 2\sin t\,\vec{j}_1 + \vec{k}_1$

شعاع دوران في جملة متحركة.

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{k}_1$ ليستا في جملة متحركة ومنه بالإسقاط

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}$$

لكن $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

إسقاط $\vec{k}_1$ بالشكل (1) نلاحظ أن إسقاط $\vec{k}_1$ مختلف بـ $\vec{v}$.

$$\vec{k}_1 = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,\vec{v}$$

لكن $\vec{v}$ بإسقاطها في شكل ②

$$\Rightarrow \vec{k}_1 = \cos\theta\,\vec{k} + \sin\theta\,[\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}]$$

$$\vec{k}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t\,\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \sin 2t)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-2 + \sin 2t)\vec{j} + \cos 2t\,\vec{k}$$ متحركة.

$$\vec{\varepsilon} = \sqrt{2}\cos 2t\,\vec{i} + \sqrt{2}\cos 2t\,\vec{j} - 2\sin 2t\,\vec{k}$$ متحركة

$\vec{\varepsilon} = -2\sin t\,\vec{i}_1 + 2\cos t\,\vec{j}_1$ ثابتة

ALWAVIB.net
Scanned by CamScanner

$\vec{w} \parallel \Delta$ : $\Delta$ محور ثابت لتشابه $\forall M_1(x_1, y_1, \beta_1)$

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{\beta_1}{r_1}$$

$$\frac{x_1}{2\cos t} = \frac{y_1}{2\sin t} = \frac{\beta_1}{1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\beta_1 \cdot \sin t \\ x_1 = 2\beta_1 \cos t \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_1^2 + x_1^2 = 4\beta_1^2}$$

معادلة دائرية نتيجة القاعدة.

$$\forall M(x, y, \beta) \in \Delta$$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{\beta}{r}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sin 2t)} = \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}(-2+\sin 2t)} = \frac{\beta}{\cos 2t}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}\sin 2t} = \frac{\beta}{\cos 2t}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}\beta} = \frac{\sin 2t}{\cos 2t} = \tan 2t$$

$$\Rightarrow 2t = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{\sqrt{2}\beta} \quad (*)$$

بتعويض في معادلات:

معادلة مستوية لمخروط مستدير

$$\begin{cases} 2x \cdot \cos 2t = \sqrt{2}\beta(2+\sin 2t) & -1 \\ 2\beta \cdot \cos 2t = \sqrt{2}\beta(-2+\sin 2t) & -2 \end{cases}$$

بقسمة (1) على (2) وبتعويض قيمة $2t$ من (*).

معادلة دائرية لمخروط مستدير $\frac{x}{y} = \frac{2+\sin \operatorname{arctg} \frac{x+y}{\sqrt{2}\beta}}{-2+\sin \operatorname{arctg} \frac{x+y}{\sqrt{2}\beta}}$

ملاحظة: إذا أعطي صعوبة تحديد زمن فقط لكتابة المعادلات مستوية وبدون ضرورة زمن.

كونك لم تعلم ما هي جملة فاضلا عنه ... في جلستنا. لكن سنتابع تابع آتي

يمكن أن نكتب بوضوح أكثر (زيادة في الشرح)

عن سنة وسنتابع شتاء من كلمة



ALADIB net

Scanned by CamScanner

إعداد : رنيم الرجبي

* كتلة A كيف يكون في حلة متحاركة واشعة عالنقطة A وكيف تتحرك مع محاورها وهنا : كتلة A على حلة متحاركة كيف

$A=(l,0,0)$

$\Rightarrow \vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sin 2t) & \frac{\sqrt{2}}{2}(-2+\sin 2t) & \cos 2t \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}(A) = l\cos 2t\,\vec{j} - l\frac{\sqrt{2}}{2}(-2+\sin 2t)\vec{k}$$

$$\vec{\Gamma}(A) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OA} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(A)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{2}\cos 2t & \sqrt{2}\cos 2t & -2\sin 2t \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sin 2t) & \frac{\sqrt{2}}{2}(-2+\sin 2t) & \cos 2t \\ 0 & l\cos 2t & \frac{l\sqrt{2}}{2}(-2+\sin 2t) \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{l}{2}(-2+\sin 2t)^2 - l\cos^2 2t\right]\vec{i} - \left[\frac{l}{2}(2+\sin 2t)(-2+\sin 2t) + 2l\sin 2t\right]\vec{j}$$

$$+ l\sqrt{2}\cos 2t\left[(2+\sin 2t) - 1\right]\vec{k}$$

... وانتهت محاضرة ...

Scanned by CamScanner

٢٠١١ 2015 / 11 / 12

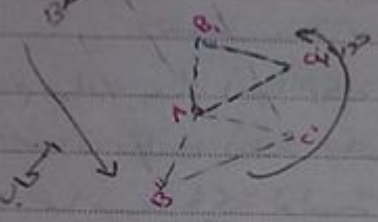
## الحركة العامة لجسم صلب ← انسحابية ودورانية

هي حركة جسم صلب طليق غير مقيد.

موضوعة سؤال: إذا أخذ جسم في الفراغ فإنه ينتقل من موضع أول إلى موضع ثاني فيمكن أن نعتبر انتقاله عبارة عن انسحاب مع أحد نقاطه ثم دوران حول هذه النقطة.

ولبيان ذلك نعلم أنه من أجل ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة يمكن تعيين موقع الجسم الصلب

$ABC \xrightarrow{\text{انسحاب}} A'B'C' \longrightarrow A_1B_1C_1 \quad \forall A, B, C \in S$




فإن الانتقال من الموضع الأول إلى موضع ثاني تم بالانسحاب من A إلى $A_1$ ثم دوران حول $A_1$ فنحصل على موضع ثاني أي $A_1B_1C_1$ $ABC \longrightarrow A'B'C'$

ونرمز $A_1B_1C_1 \longrightarrow A'B'C'$ بالرمز $A'$ (النقطة المستعملة) بقطب الحركة أي دراسة الحركة العامة لجسم صلب هي دراسة الحركة على أنها حركة انسحابية مع القطب يليها دوران حول هذا القطب.

### تعيين شعاع الموضع OM:

$$\forall M \in S \quad , \quad \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

A قطب الحركة ، O نقطة للفراغ الثابت.

ونعلم أن الانسحاب يتعين بـ 3 وسطاء والتي هي إحداثيات القطب $(x_A, y_A, z_A)$ ثم دوران يتعين بـ 3 وسطاء وهي زاوية أولر $\theta, \varphi, \psi$ وبالتالي يوجد 6 وسطاء (إحداثيات) للحركة أي يوجد 6 معادلات للحركة.

**السرعة** عبارة عن مجموع سرعتين انسحابية مع القطب A ودورانية حول قطب A. أي:

$$\forall M \in S \quad , \quad \vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM}$$

**مبرهنة:** إن شعاع دوران الحركة العامة لجسم صلب لا يتعلق باختيار القطب (أي في حالة دوران حول نقطة ثابتة)

**الإثبات:** نفرض أن $A, B \in S$ ولنفرض أن A و B قطبا الحركة.

$$\Rightarrow \vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} \quad \text{---} ①$$

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(B) + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM} \quad \text{---} ②$$

من ① و ② نجد: $\vec{V}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} = \vec{V}(B) + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$

باعتبار A قطب الحركة

$$V(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AM} = \vec{V}(A) + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB} + \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

$$\vec{\omega}_A \wedge (\vec{AM} - \vec{AB}) = \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

$$\vec{\omega}_A \wedge \vec{BM} = \vec{\omega}_B \wedge \vec{BM}$$

أي نجد $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$ و $\forall M \in S$ ← لأن M اختيارية ما



ALNAVIB.net

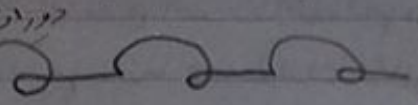
Scanned by CamScanner

/ /

**محور الفتل الآني**: هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط الجسم الصلب التي تكون سرعها خطية لشعاع دوران.

إذا كان لدينا $\Delta$ محور فتل الآني ولدينا $O \in \Delta$ فإن $\frac{V_x(O)}{p} = \frac{V_y(O)}{q} = \frac{V_z(O)}{r}$

هذا يعني أن $\vec{V}(O) \parallel \vec{\omega}$




* الحركة العامة هي توالي لحركتان لولبية ⇐ يدل هذا التوازي إلى الارتباط الخطي بين شعاعين أي:

$$\vec{V}(O) = b\vec{\omega}$$

إذا كان $O$ هي قطب للحركة عندئذ يكتب شعاع سرعة نقطة $M$ بالشكل:

$$\forall M \in \mathcal{E} \; ; \; \vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$$= b\vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \quad *$$

وهو نفس قانون سرعة في حركة لولبية وبالتالي يمكن النظر إلى الحركة العامة لجسم صلب على أنها حركة لولبية آنية حول محور دوران يوازي شعاع دوران $\vec{\omega}$ و يمر من أن قطب نقطة محور فتل و $b$ هي خطوة اللولب في هذه الحالة نقول أن الحركة العامة هي حركة لولبية في كل لحظة وفي المقادير $(\vec{\omega}, O, b)$ بمناصر الفتل الآني فلتعين عناصر الفتل الآني نعين $\vec{\omega}$ أولا ثم نعين أحداثيات $O$ من شرط توازي بين سرعة $O$ مع $\vec{\omega}$ ونعين $b$ من العلاقة * نضرب طرفيها بـ $\vec{\omega}$ فنحصل على:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{V}(M) = b\omega^2 + 0 \Rightarrow b = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{V}(M)}{\omega^2}$$

إن خطوة $b$ هي ثابتة في جميع نقاط الجسم في لحظة المذكورة و لكنه تابع لزمن أي $b = b(t)$ لذلك فهي خطوة متغيرة أنية. بما $\forall M \in \mathcal{E}$ هي $\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ وعليه فإن:

نتائج وملاحظات: أولا: إذا كانت $\vec{V}(O)$ معدومة في لحظة ما عندها سرعة تكون حركة دورانية حول نقطة. $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

ثانيا: إذا كانت $\vec{\omega} = 0$ معدومة في لحظة ما عندها سرعة تكون الحركة انتقالية آنية. $\vec{V}(M) = \vec{V}(O)$

عبارة التساوي:

$$\forall M \in \mathcal{E}, \; \vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad (*)$$

لتكن $O_1$ و $O_2$ المراكز ثابتة عندها

$$\frac{d(\vec{OM})}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OO_1} + \vec{O_1M})$$

$$= -\frac{d(\vec{O_1O})}{dt} + \frac{d(\vec{O_1M})}{dt}$$

$$= -\vec{V}(O) + \vec{V}(M)$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

نعوض في $(*)$ ونجد $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$



Scanned by CamScanner

حيث $\vec{P}(o)$ شاع الدفع $\vec{P}_0(M) \cdot \vec{\xi}_{1/0}\vec{OM} + \vec{\omega}_{1/0}(\vec{\omega}_{1/0}\vec{OM})$ شاع دوران حول نقطة ثابتة

أصابيا: قطبيا عجلة $\vec{OM}$ ستكون كما متحركة

الدراسة التحليلية للحركة:

Scanned by CamScanner