المحاضرة الثامنة - الاربعاء   2015/11/4

البنية التبولوجية للاعداد العقدية

عرفنا سابقاً أن $\mathbb{C}$ مع عمليتي الجمع والضرب

يعد يشكل فضاء متجهي (متجهياً)

$$|\cdot|: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

هذا تابع الطويلة

هذا التابع يحقق شروط النظيم ومنه

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ يشكل فضاء منظم

حيث شروط النظيم

① $\|x\| \geq 0$

② $\|x\| = 0 \iff x = 0$

③ $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

④ $\|x+y\| \leq \|x+z\| + \|z+y\|$ متراجحة المثلث

ملاحظة

النظيم يعرف فقط على الفضاءات ولا يمكن تعريفه

على المجموعات

* كل فضاء منظم هو فضاء متري لكن العكس غير صحيح بالضرورة ومنه فإن $\mathbb{C}$ فضاء متري حيث إن المسافة المعرفة على $\mathbb{C}$ المولدة من النظيم هي: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

* كل فضاء متري هو فضاء تبولوجي والعكس غير صحيح بالضرورة $\Leftarrow$ $\mathbb{C}$ فضاء تبولوجي

* بعض التعاريف التبولوجية للاعداد العقدية:

• **القرص المفتوح: $D(z_0, r)$**

ندعو مجموعة النقاط في المستوي التي تحقق $|z - z_0| < r$ بالقرص المفتوح الذي مركزه z_0 ونصف قطره r

ونرمز لهذا القرص بـ $D(z_0, r)$ ونسميه القرص المفتوح الذي مركزه z_0 بالجوار المفتوح لـ z_0.. ونصف القطر غير مهم في هذه الحالة

ملاحظة

① عندما نقول قرص ونكتفي بذلك فإننا نقصد

② انه مفتوح.. في حال ذكرنا انه مغلق يكون

③ مغلق

④ • **القرص المغلق: $\overline{D}(z_0, r)$**

ندعو مجموعة النقاط بالمستوي التي تحقق المتراجحة $|z - z_0| \leq r$ بالقرص المغلق الذي مركزه z_0 ونصف قطره r

• **النقطة الداخلية:**

لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{C}$ $[A \subseteq \mathbb{C}]$ فنقول عن z_0 انها داخلية في A اذا وفقط اذا وجد لها جوار محتوى في A وهذا يكافئ وجود $r > 0$ حيث يكون $D(z_0, r) \subseteq A$ ونرمز لمجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A بالرمز

$\boxed{A^{\circ}}$ أو $\boxed{\mathrm{int}\, A}$

Alnour

• المجموعة المفتوحة $A \subseteq \mathbb{C}$

نقول ان A انها مفتوحة اذا كانت جميع نقاطها داخلية ($A = A^\circ$)

• المجموعة المغلقة $A \subset \mathbb{C}$

تكون المجموعة مغلقة إذا كانت متممتها في $\mathbb{C}$ هي مجموعة مفتوحة

أمثلة

① القرص المفتوح هو مجموعة مفتوحة...

شرح: اذا أخذنا قرص مفتوح وأخذت نقطة من حد القرص هذه النقطة لن تنتمي الى المحيط لانه في الاصل ليس من المجموعة (القرص)

الاثبات.

ليكن $(\mathbb{C}, d)$ فضاء متري ولتكن $z \in \mathbb{C}$ وليكن $r > 0$ و $D(z, r)$ قرصا مفتوحا في الفضاء $\mathbb{C}$

$$z_0 \in D(z, r) \Rightarrow d(z, z_0) < r$$
$$\Rightarrow r - d(z, z_0) > 0$$

ونفرض $\varepsilon = r - d(z_0, z)$

$$\forall z' \in D(z_0, \varepsilon) : d(z', z_0) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow d(z', z_0) < r - d(z_0, z)$$
$$\Rightarrow d(z', z_0) + d(z_0, z) < r$$
$$\Rightarrow d(z', z) < r$$
$$\Rightarrow D(z_0, \varepsilon) \subseteq D(z, r)$$

وبالتالي $D(z, r)$ مجموعة مفتوحة

② $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$

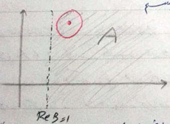
أن المجموعة مفتوحة

$$\forall z \in A \Rightarrow \operatorname{Re} z > 1$$
$$\Rightarrow r_z = \frac{\operatorname{Re} z - 1}{2} > 0$$
$$\Rightarrow \exists D(z, r_z) \subseteq A$$

مهما صغرنا نصف القطر فإن القرص المفتوح يكون محتوى بالمجموعة.

فلو أخذنا نصف القطر هو $r_z = \operatorname{Re} z - 1$ فإنه سيمس المستقيم $\operatorname{Re} z = 1$ وهو غير محتوى ضمن المجموعة بالتالي فإن هذه ~~المجموعة~~ القرص سيكون محتواة بالمجموعة A (لان المحيط القرص ليس من القرص)

ملاحظة: يمثل الاثبات في التحليل العقدي بالرسم



من الواضح أن كل نقطة من A داخلية فيه

③ $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 1\}$.

إن المجموعة B ليست مفتوحة ولإثبات ذلك يكفي إيجاد ولو نقطة واحدة من المجموعة غير داخلية. حيث

تمثل هذه المجموعة نصف المستوي العقدي الواقع على يسار المستقيم $\mathrm{Re}\, z = 1$ مع المستقيم

إن المجموعة B غير ~~منتهية~~ مفتوحة لو أخذنا أي نقطة من المستقيم $\mathrm{Re}\, z = 1$ وأخذ جوار لهذه النقطة. وذلك مهما صغرنا نصف القطر فانه سوف يقع خارج المجموعة B وبالتالي جميع النقاط الواقعة على المستقيم ليست داخلية وبالتالي ليست مفتوحة.

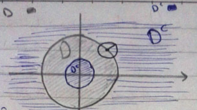
إن B مغلقة لأن $\mathbb{C}/B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1\}$ وهي مجموعة مفتوحة.

ملاحظة

لا يمكن الجزم إذا كانت المجموعة غير مفتوحة فهي مغلقة وبالعكس أيضاً لأن هناك مجموعات لا مفتوحة ولا مغلقة

ع أ ب و أ هـ

④ $D = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \le 2\}$



تمثل المجموعة D حلقة مركزها المبدأ ونصف قطرها الداخلي 1 وذلك بدون النقاط المحيط الداخلي ونصف قطرها الخارجي 2 وذلك مع المحيط الخارجي

إن المجموعة D ليست مفتوحة لأنه إذا أخذنا أي نقطة من نقاط المحيط الخارجي فيكون القرص المفتوح الذي مركزه احد تلك النقاط ومهما صغرنا نصف القطر سيكون جزء من هذا القرص خارج المجموعة D ومنه فإن نقاط المحيط الخارجي ليست داخلية في D ومنه D ليست مفتوحة.

لنأخذ متممة D وهي

$D^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \wedge |z| > 2\}$

في حال كانت D^c مفتوحة سيكون D مغلقة.

من الواضح ان D^c ليست مفتوحة لانه باخذ أي نقطة تحقق $|z| = 1$ وباخذ القرص المفتوح الذي مركزه تلك النقطة ونصف قطره r مهما يكن r سيقع جزء من القرص خارج المجموعة ومنه ليست كل نقاط D^c داخلية أي D ليست مغلقة

• نقطة التراكم لـ $A \subseteq \mathbb{C}$

نقول عن z_0 أنها نقطة تجمع (تراكم) إذا كان كل جوار لها يحوي نقطة واحدة على الأقل من A غير z_0، هذا يعني

$\forall \varepsilon > 0 , D(z_0, \varepsilon) \cap A \setminus \{z_0\} \neq \emptyset$

ملاحظة

في الفضاءات الطبولوجية العامة كل نقطة تجمع هي نقطة حدية لكن العكس غير صحيح بالضرورة

• في الفضاءات المترية فإن كل نقطة تجمع هي نقطة حدية والعكس صحيح دوماً

• النقطة الحدية لـ $A \subseteq \mathbb{C}$

نقول عن z_0 أنها نقطة حدية لمجموعة A إذا كان أي جوار مفتوح لـ z_0 يحوي عدد غير منتهٍ من نقاط المجموعة A

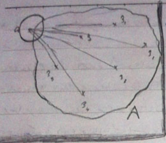
انتهت المحاضرة

المحاضرة التاسعة - الاثنين في 2013/11/9

• تكون المجموعة مغلقة إذا حوت نقاط تجمعها.

• أي مجموعة منتهية لا تملك نقاط تجمع أي لا يمكن لمجموعة منتهية في $\mathbb{C}$ أن تملك نقطة تجمع

الإثبات: لتكن $A \subseteq \mathbb{C}$ ولتكن A مجموعة منتهية



فترض جدلاً أن هناك نقطة تجمع سنفرض حالتين

1- a نقطة تجمع بحيث: $a \notin A$

نحسب أبعاد النقطة a عن جميع عناصر المجموعة A ثم نأخذ Min المسافات وهذا موجود (Min أي) هو بعد النقطة عن نقاط المجموعة (الأصغر)

نأخذ قرص مفتوح مركزه a ونصف قطره $\left(\frac{Min}{2}\right)$ وبالتالي القرص لا يحوي أي نقطة من المجموعة وبالتالي a ليست نقطة تراكم

2- a نقطة تجمع وبحيث: $a \in A$

نأخذ بعد النقطة عن نقاط المجموعة ثم نأخذ Min الأبعاد ومن ثم نأخذ قرص مركزه a ونصف قطره $\left(\frac{Min}{2}\right)$ وبالتالي لا يوجد نقطة أخرى غير a في القرص أي لا يوجد لـ A نقاط تجمع

برهان آخر: نقول بما أن النقطة الحدية هي تجمع وبما أن تعريف النقطة التجمع هي أن تحوي أي جوار لها عدد غير منتهٍ من نقاط المجموعة ولكن A مجموعة منتهية بالتالي وصلنا إلى تناقض

* المجموعة غير المنتهية ربما تملك نقاط تراكم وممكن لا.
لأن في مثل هذه المجموعات لا نضمن وجود الـ (Min) وإذا أخذنا الـ (inf) ربما لا يوجد نقطة تمثله وبالتالي في منصبنا أي يكون (ε) وبالتالي ليس بالضرورة أن تكون مجموعة غير منتهية نقاط تجمع..

مثال: $\mathbb{Z}$.
هذه مجموعة غير منتهية ولا تملك نقاط تجمع

* كل مجموعة منتهية في $\mathbb{C}$ ستكون مغلقة..
لأن نقاط تجمعها هي ϕ والخالية محتواة في كل مجموعة

* المجموعة وحيدة العنصر هي مغلقة لأن متممتها مفتوحة وبالتالي ($\mathbb{C}$ - {مجموعة منتهية}) هي مجموعة مفتوحة

* لماذا $\mathbb{Z}$ مغلقة؟!
لأن البعد بين أي عددين متتاليين هو الواحد وبأخذ القرص الذي مركزه أحد الأعداد الصحيحة ونصف قطره ($\frac{1}{2}$ مثلاً) سوف لن يحوي أي نقطة بالتالي $\mathbb{Z}$ لا تملك نقاط تجمع وهي (ϕ) والخالية محتواة بـ $\mathbb{Z}$.

* هل المجال المفتوح في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مفتوحة في $\mathbb{C}$؟!
لا. لأن المجال في $\mathbb{C}$ عبارة عن أقراص بالتالي أي قرص سنأخذ جوار سيحوي نقاط

* المجموعة المحدودة.. $A \subseteq \mathbb{C}$
نقول عن A إنها محدودة إن أمكن جعلها محتواة في قرص مركزه المبدأ (ممكن أن نأخذ المركز مختلف عن المبدأ) ونصف قطره ~~محدد~~ منتهي $\Leftrightarrow$
$\exists\, 0<M<\infty : |z| \le M ; \forall z \in A$

مبرهنة فاير ستراش
كل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ غير منتهية وغير محدودة تملك نقطة تجمع

$\boxed{\text{ملاحظة} \quad \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2}$

• لصاقة مجموعة (غلاقة) $A \subseteq \mathbb{C}$

نقول عن نقطة a إنها ملاصقة لـ A
إذا وفقط إذا أي جوار لها حوى نقطة
من A.

يرمز لمجموعة النقاط الملاصقة بـ $\bar{A}$

مبرهنة:

+ أي مجموعة محتواة بلاصقتها

+ إذا كانت A مغلقة $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

$$\Rightarrow \bar{A} = \underbrace{A}_{\text{المجموعة الاصلية}} \cup \underbrace{A'}_{\text{مجموعة نقاط التجمع}}$$

+ لصاقة أي مجموعة منتهية هي نفسها

• محيط مجموعة لـ $A \subseteq \mathbb{C}$

نقول عن النقطة a إنها محيطية لـ A
إذا حوى أي جوار لها نقطة من A
ونقطة من A^c (متممة).

ويرمز لمجموعة النقاط المحيطية بـ ∂A
أو $Fr_0(A)$.

مبرهنة:

$$\partial A = \bar{A} \cap \bar{A^c}.$$

مثال: أثبت أنه إذا كان القرص المفتوح
$D(0,1)$ فإن التالي محقق:

- $\overline{D(0,1)} = \bar{D}(0,1) \rightarrow$ القرص المغلق
- $\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \rightarrow$ دائرة الواحدة

• خارج المجموعة $A \subseteq \mathbb{C}$

خارج المجموعة A هو داخل متممتها

ملاحظة ①:

خارج المجموعة مختلف عن متممة المجموعة

ملاحظة ②:

إن المجموعة $r_1 < \operatorname{Re} z < r_2$
هي مجموعة مفتوحة وغير محدودة..
وضح ذلك بالرسم.

• المجموعة المتراصة لـ $K \subseteq \mathbb{C}$

نقول عن K أنها متراصة إذا أمكن استخراج
تغطية جزئية منتهية من أي تغطية
مفتوحة لـ K

- التغطية: هي مجموعة من المجموعات
اجتماعها يحوي المجموعة

تمرين: أثبت أن القرص الواحدي المفتوح $D(0,1)$
مجموعة غير متراصة

فكرة الحل:

$\{D_n = D(0, 1-\frac{1}{n})\}_{n \geq 2}$:

هذه غير منتهية أثبت أن

$D(0,1) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} D_n$

لا تزال تشكل تغطية

كل متراصة هي مغلقة و محدودة

في أي فضاء طوبولوجي

لكن كل مغلقة ليس بالضرورة أن تكون

متراصة

وكل محدودة ليس بالضرورة أن تكون

متراصة

مثال

* قرص الواحدة المفتوح محدود

لكن ليس متراص

* $A = \{ z \in \mathbb{C} ; \ Im\, z \geq 1 \}$

هذه المجموعة مغلقة وغير متراصة

مبرهنة هاين-بورل في R^n

الشرط لتكون المجموعة متراصة أن

تكون محدودة ومغلقة

مثال قرص الواحدة المغلق $\overline{D}(0,1)$

مجموعة متراصة لأنها مغلقة و محدودة

مبرهنة

المجموعة المغلقة والجزئية من متراصة

هي متراصة ..

لأن كل جزئية من متراصة هي محدودة لأن

المتراصة محدودة ولأنها مغلقة بالتالي

الجزئية من المتراصة متراصة

* تقاطع مغلقة مع متراصة متراصة

مبرهنة [برهانها غير مطلوب]

لا يمكن لمجموعة متراصة

جزئية من مفتوحة

أن تقترب من محيط

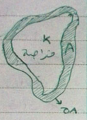
المفتوحة بالقدر الذي

نشاء، أي دائماً

سيكون هناك حد موجب

بين محيط المفتوحة والمتراصة

البعد بينهم موجب تماماً



A مفتوحة

∂A محيط المجموعة

K متراصة

* المجموعة المترابطة $A \subseteq \mathbb{C}$

نقول عن A أنها مترابطة إذا لم تتمكن من

كتابتها اجتماعاً (اتحاداً) لمجموعتين غير

خاليتين مفتوحتين ومنفصلتين (تقاطعهم خالي)

"ممكن نقسم الكتلة الى مجموعتين منفصلتين اي"

* الخط المضلعي

لتكن $B_1, B_2, B_3, \dots B_{n+1}$

مجموعة من النقاط في المستوي العقدي، ولتكن

l_k القطعة المستقيمة الواصلة بين B_k و B_{k+1}

حيث $k=1, \dots, n$. نسمي المتتالية للقطع

المستقيمة المرتبة خطاً مضلعياً بدايته B_1

ونهايته B_{n+1} نرمز له بالخط $B_1 \dots B_{n+1}$

Alnour