⊕ ماذا تمثل المعادلة $|z-a| = r$ ؟

إن الطويلة $|z-a|$ هي بعد z عن a

فإننا نميز الحالات التالية:

∘ $r=0$ أي هي مجموعة نقاط المستوي التي بعدها عن المركز يساوي الصفر أي النقطة

∘ $r<0$ تمثل المجموعة الخالية

∘ $r>0$ مجموعة نقاط المستوي التي بعدها عن a هو بعد ثابت r أي هو يمثل دائرة مركزها a ونصف قطرها r

⊕ ماذا تمثل المعادلة $|z-(1+i)| = 2$

دائرة مركزها $(1+i)$ ونصف قطرها 2

⊕ ماذا تمثل المعادلة $z = re^{it}$

حيث $r>0$ و $0 \le t \le 2\pi$

هو عدد عقدي مكتوب بالشكل ~~[illegible]~~ الأسي. طويلته $|r|$ وزاويته t

عندما تتغير t من 0 إلى 2π سترسم دائرة نصف قطرها r

⊕ جذر عدد عقدي:

نقول عن عدد عقدي z إنه جذر من المرتبة n حيث $(n \ge 2)$ و $n \in N$ للعدد العقدي a إذا كان

$$z^n = a$$

⊕ كيفية إيجاد الجذور من المرتبة n للعدد العقدي

ليكن a عدد عقدي نميز حالتين

↲ $a=0$ ⟸ الجذر الوحيد لـ $a=0$ هو صفر لأن

$$\forall z^n \neq 0 \Rightarrow z \neq 0$$

$$\Rightarrow \forall z^n = 0 \Rightarrow z = 0$$

↲ $a \neq 0$ ⟸

$$a = |a| \operatorname{cis} \theta$$

ونفرض $z = r \operatorname{cis} \varphi$

نقول عن z أنه جذراً من المرتبة n إذا حقق

$$(r \operatorname{cis} \varphi)^n = |a| \operatorname{cis} \theta$$

ويمكننا استبدال θ بالعامل الرئيسي

$$\Rightarrow (r \operatorname{cis} \varphi)^n = |a| \operatorname{cis} Arg(a)$$

$$\Rightarrow r^n \operatorname{cis}(n\varphi) = |a| \operatorname{cis} Arg(a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^n = |a| \\ n\varphi = Arg\, a + 2\pi k \; ; \; k \in Z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \varphi = \frac{Arg\, a}{n} + \frac{2\pi k}{n} \ ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي إن الجذور لـ a هي

$$z_k = \sqrt[n]{|a|} \ Cis\left(\frac{Arg\, a + 2\pi k}{n}\right)$$

$K = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$\Longrightarrow z_0, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ تكرار

مختلفة عن بعضها البعض لأن إذا أضفنا

2π وفي حال أجرينا $K=n$

سنعود إلى z_0 و $K=n+1$

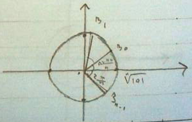
هو z_1 وهكذا...

$\Longleftarrow$ نجد أن الجذور المتمايزة للعدد العقدي من المرتبة n هي n جذر

• بما أن جميع الجذور $z_k = \sqrt[n]{|a|}$

وذلك $\forall K = 0, 1, \ldots, n-1$

فإن جميع الجذور تقع على الدائرة التي نصف قطرها $\sqrt{|a|}$



ملاحظة: إن الجذر $\sqrt[n]{|a|}$ لا يمكن أن يكون سالب كانت n فردية أو زوجية والسبب وجود قيمة مطلقة بداخله. وبذلك يكون قد استبعدنا حالة الجذر الفردي السالب

ملاحظة: الجذور من المرتبة n لعدد عقدي هي رؤوس مضلع منتظم ~~...~~ عدد أضلاعه n. أي الجذور التكعيبية تشكل مثلث والجذور من الدرجة الرابعة تشكل مربع.

مثال:

أوجد الجذور التكعيبية للعدد $a = -1 + i\sqrt{3}$ ثم مثلها بالمستوي العقدي..

$\tan a = -\sqrt{3}$

وإن الـ ($\tan$) تابع فردي

$\Longrightarrow \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\Longrightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

العدد بالربع الثاني والزاوية بالربع الرابع بالتالي وضيف π

$\Longrightarrow a = 2\ Cis\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right)$

$= 2\ Cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

ونفترض أن الجذر التكعيبي لـ a هو من الشكل

$z = r\ Cis\ \varphi$

$$\Rightarrow z^3 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow r^3 \operatorname{cis} 3\varphi = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ 3\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

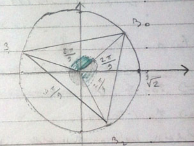
$$\Rightarrow z_k = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{9}\right)$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{9}\right)$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{14\pi}{9}\right)$



② $a = 3 + 2i$

من غير الواضح ما هي الزاوية لهذا العدد العقدي لأنها من الزوايا غير الشهيرة لذلك سنفرض الشكل الجبري بفرض z هو الجذر التربيعي للعدد a :

$z = x + iy$

$$\Leftrightarrow z^2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow (x + iy)^2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xiy = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

التكملة في الأعلى

ملاحظة: في حال وصلنا الى المساواة

$x^2 = 1$

لا نقول إن $x = \pm 1$ بل $x = 1$ لأن x هنا عدد حقيقي وليس عقدي

ملاحظة 2: قد نستفيد في الحل أكثر

$$(x + iy)^2 = |(\sqrt{x^2 + y^2})^2|$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{13}$$

التتمة في الصفحة