جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

مقرر التحليل 3

المحاضرة الخامسة

تاريخ المحاضرة: 27/10/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

قبل البدء في المحاضرة سوف أُقدم لكم حل المثال(4) من المحاضرة السابقة ص5:

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

ببساطة يمكن التحقق من أن الجداء المفروض متقارب شرطياً وقمنا بحل تمارين كثيرة عن ذلك ، ولإيجاد قيمتهُ نشكل الجداء الجزئي النوني له P_n ونعلم أن

$$P_n=\prod_{k=2}^{k=n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\dots\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right).\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\dots\left(\frac{n-1+(-1)^{n-1}}{n-1}\right).\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}} \quad P_n=\begin{cases}1 & if \quad n\ \text{فردي}\\ \dfrac{n+1}{n} & if \quad n\ \text{زوجي}\end{cases} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ويفضل كتابتها بالشكل}} \quad P_n=\frac{1}{2}\left[\frac{2n+1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{2n+1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right]=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[2+0]=1 \ \Rightarrow P=1$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\{P_n\}_{n\geq 2}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء الغير منتهي المفروض متقاربة من العدد المحدود وغير المعدوم $P=1$ وهذا بدوره يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض متقارب والأكثر من قيمة ذلك الجداء هي $P=1$.

بداية المحاضرة

التقارب المنتظم لمتتالية من التوابع الحقيقية

تعريف: نقول عن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ المعرفة على $I\subseteq\mathbb{R}$ إنها متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I **إذا وفقط إذا** وجد من أجل كُل عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ عدد طبيعي $N_0\neq 0$ بحيث يتحقق $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من المجال I.

بحيث $N_0=N_0(\varepsilon)$ أي العدد الطبيعي N_0 يتعلق بالعدد ε المأخوذ فقط.

نتيجة: ينتج من تعريف المتتالية التابعية المتقاربة نقطياً والمتتالية التابعية المتقاربة بانتظام أن كُل متتالية تابعية متقاربة بانتظام على I من تابع مثل $f(x)$ تكون متقاربة نقطياً على I من $f(x)$ إلا أن **العكس ليس بالضرورة صحيحاً** أي ليس كل متتالية تابعية متقاربة نقطياً تكون متقاربة بانتظام.

مُلاحظة: كُل متتالية تابعية متقاربة نقطياً يكون تقاربها إما منتظماً أو غير منتظم. ففي حالة التقارب المنتظم يتعلق العدد الطبيعي N_0 بِـ ε فقط ولا يتعلق بالنقاط x من I ، أي عند تثبيت $\varepsilon > 0$ فإن العدد الطبيعي N_0 يكون صالحاً لتحقيق المتراجحة $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ من أجل كُل قيم $n \geq N_0$ ومن أجل كُل قيم x من I أما في حالة التقارب الغير منتظم فلا يتحقق السابق لأن العدد الطبيعي N_0 سوف يتعلق بِـ ε وبالنقطة x من I.

أمثلـــة

مثال(1): لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ بحيث $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ و $x \in I = [1, +\infty[$.

إن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I = [1, +\infty[$ من التابع:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{x}(0) = 0$$

أي أنها متقاربة نقطياً على المجال $I = [1, +\infty[$ من التابع الصفري $f(x) = 0$.

- لنثبت أن المتتالية التابعية المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x) = 0$ على $I = [1, +\infty[$.

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ لنبحث في وجود العدد الطبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وذلك لجميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0(\varepsilon)$ ، ولجميع قيم $x \in I = [1, +\infty[$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{nx} - 0\right| = \left|\frac{1}{nx}\right| \underbrace{=}_{\substack{\text{إن } n\geq 1 \text{ موجب و} \\ \text{موجب } x \text{ أي } x\in[1,+\infty[}} \frac{1}{nx} \underbrace{\leq}_{\substack{\text{أي } x\in[1,+\infty[\\ x\geq 1 \text{ ومنه } \frac{1}{x}\leq 1}} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يُمكن اختيار العدد الطبيعي N_0 بحيث $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ أي بحي $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (أي يتعلق بِـ ε) ومع هذا الاختيار سوف يتحقق:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وذلك لكُل $n \geq N_0(\varepsilon)$ ، ولكُل $x \in I = [1, +\infty[$.

وهذا بدوره يعني أن المتتالية المفروضة متقاربة بانتظام على $I = [1, +\infty[$.   **"استناداً للتعريف"**

مثال(2): بفرض أن $0 < p < q < 1$ وأن $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية من التوابع الحقيقية بحيث

$$f_n(x) = x^n$$

وذلك $\forall\ x \in I = [p, q]$.

إن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I = [p, q]$ من التابع:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty} x^n \underbrace{=}_{\substack{0<p<q<1 \\ x\in[p,q] \text{ و}}} 0$$

أي أنها متقاربة نقطياً على المجال $I=[p,q]$ من التابع الصفري $f(x)=0$.

- لنثبت أن المتتالية التابعية المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$ على $I=[p,q]$.

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ لنبحث في وجود العدد الطبيعي $N_0=N_0(\varepsilon)\neq 0$ بحيث يكون

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

وذلك لجميع قيم n المحققة لِـ $n\geq N_0(\varepsilon)$ ، ولجميع قيم $x\in I=[p,q]$.

$$|f_n(x)-f(x)|=|x^n-0|=|x^n| \underbrace{=}_{\substack{0<p<q<1 \\ \text{و } x\in[p,q] \text{ أي } x \text{ موجب}}} x^n<\varepsilon$$

$$x^n<\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بأخذ لوغاريتم الطرفين} \\ \text{كون } \varepsilon \text{ موجب وكذلك } x \text{ موجب}}} \ln(x^n)<\ln(\varepsilon) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{خواص اللوغاريتم}} n\ln(x)<\ln(\varepsilon)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{نقسم طرفي المتراجحة على } \ln(x) \\ \text{وهو مقدار سالب من أجل كُل } x \text{ لأن } x\in[p,q] \\ \text{و } 0<p<q<1}} n>\frac{\ln(\varepsilon)}{ln(x)}$$

لكن:

$$\ln(x)\leq\ln(q) \quad ; \quad \forall\, x\in I=[p,q] \quad and \quad 0<p<q<1$$

ومنهُ:

$$\frac{1}{\ln(x)}\geq\frac{1}{\ln(q)} \quad ; \quad \forall\, x\in I=[p,q] \quad and \quad 0<p<q<1$$

بالعودة نحصل على:

$$n>\frac{\ln(\varepsilon)}{ln(q)}$$

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يُمكن اختيار العدد الطبيعي N_0 بحيث $N_0>\frac{\ln(\varepsilon)}{ln(q)}$ (أي يتعلق بـِ ε)

ومع هذا الاختيار سوف يتحقق:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

وذلك لكُل $n\geq N_0(\varepsilon)$ ، ولكُل $x\in I=[p,q]$.

وهذا بدوره يعني أن المتتالية المفروضة متقاربة بانتظام على $I=[p,q]$. **"استناداً للتعريف"**

ولكن انتبه أن كُل هذا الإثبات ضمن الفرضية القائلة بأن $0 < p < q < 1$.

مثال(3): لنأخذ متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ وبحيث $f_n(x) = x^n$ و $x \in I = [0,1]$.

وجدنا في المحاضرة السابقة "راجع المثال الأول صـ7" أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I = [0,1]$ من التابع:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & if \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & if \quad\quad x = 1 \end{cases}$$

إلا أن هذا التقارب ليس منتظماً على المجال $I = [0,1]$.

في الحقيقية إن متتالية التوابع المفروضة ليست متقاربة بانتظام على المجال $]0,1[$ فلاحظ أنهُ من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يُمكن اختيار العدد الطبيعي N_0 بحيث $N_0 > \frac{\ln(\varepsilon)}{ln(x)}$ (أي يتعلق بـِ ε و x) ومع هذا الاختيار سوف يتحقق:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

وذلك لكُل $n \geq N_0(\varepsilon, x)$ ، ولكُل $x \in I =]0,1[$.

لكن عندما تتغير x في المجال $]0,1[$ مقتربة من الواحد فإن $\ln(x)$ تسعى إلى الصفر ومن ثم $\frac{\ln(\varepsilon)}{ln(x)}$ تسعى لـِ اللانهاية وفي هذه الحالة لا يُمكن إيجاد عدد طبيعي غير معدوم N_0 بحيث يتحقق

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

لكُل $n \geq N_0$ ، ولكُل $x \in]0,1[$ مما يعني أن متتالية التوابع المفروضة ليست متقاربة بانتظام على المجال $]0,1[$ من التابع $f(x)$ ومن ثم تكون غير متقاربة بانتظام على المجال $I = [0,1]$.

نتيجة: إذا كانت متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام على المجال I فهي متقاربة بانتظام على أي مجال جزئي من I **لكن العكس ليس بالضرورة صحيح**. لاحظ في المثال (3) السابق أن المتتالية التابعية المفروضة ليست متقاربة بانتظام على المجال $[0,1]$ على الرغم من أنها متقاربة بانتظام على المجال الجزئي منهُ $[p, q]$ بحيث $0 < p < q < 1$ وهذا ما قمنا بتبيانهُ في المثال(2).

بعض من الخواص الأساسية لمتتاليات التوابع الحقيقية المتقاربة بانتظام

مبرهنة(1): لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية توابع معرفة على مجال ما مثل $I \subseteq \mathbb{R}$. وبفرض أنها متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I. عندئذٍ:

1– إذا كانت حدود المتتالية توابع مستمرة على I ، فإن تابع النهاية $f(x)$ يكون أيضاً مستمراً على I.

2– إذا كانت حدود المتتالية توابع محدودة على I ، فإن تابع النهاية $f(x)$ يكون أيضاً محدوداً على I.

الإثبات: لتكن $x_0 \in I$ كيفية ، وليكن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي موجب وكيفي.

بما أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I فإنهُ يوجد من أجل العدد الحقيقي الموجب $\frac{\varepsilon}{3}$ عدد طبيعي $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يكون $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ وذلك لكُل $n \geq N_0(\varepsilon)$ ، ولكُل $x \in I$ بما فيها x_0.

من الفرض الأساسي المعطى في نص المبرهنة

1– لنفرض أن حدود المتتالية التابعية المدروسة مستمرة على I أي التابع $f_n(x)$ مستمر على I وذلك لكُل $n \geq 1$ ، ولنثبت أن التابع $f(x)$ مستمر على I.

بما أن $f_n(x)$ مستمر على I فيوجد من أجل العدد الحقيقي الموجب $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ ، عدد حقيقي موجب $\delta > 0$ بحيث أنهُ إذا تحقق $|x - x_0| < \delta$ لكُل $x \in I$ **فإن** $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

من فرضية الطلب الأول

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{خواص القيمة المطلقة}} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\underbrace{<}_{\substack{\text{استفد من الفرض الأساسي}\\ \text{ومن فرضية الطلب الأول}}} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

وبالتالي من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ ، يوجد عدد حقيقي موجب $\delta > 0$ بحيث أنهُ إذا كان $|x - x_0| < \delta$ لكُل $x \in I$ فإن $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

من الأخيرة يتبين لنا أن التابع f مستمر عند النقطة x_0 من I ، وبما أن x_0 كيفية من I فهذا يعني أن التابع f مستمر على I.

برهان الطلب الأول

2– بما أن التابع $f_n(x)$ محدوداً على I وذلك لكُل $n \geq 1$ ، فيوجد عدد حقيقي موجب مثل $k > 0$ بحيث

$$|f_n(x)| < k \quad ; \quad \forall\, x \in I \quad , \quad \forall\, n \geq 1$$

من فرضية الطلب الثاني

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \underbrace{\leq}_{\text{خواص القيمة المطلقة}} |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

$$\underbrace{<}_{\substack{\text{استفد من الفرض الأساسي}\\ \text{ومن فرضية الطلب الثاني}}} \varepsilon + k \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + k = M \quad ; \quad \forall\, x \in I$$

وجد عدد حقيقي موجب $\varepsilon + k = M > 0$ بحيث $|f(x)| < M$ لكُل x من I وهذا يعني أن التابع $f(x)$ محدود على I.

برهان الطلب الثاني

انتهت المحاضرة الخامسة