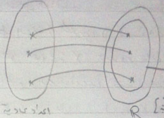
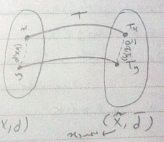
⊕ اكمال الفضاءات المترية الغير تامة

شرح:



إن الفضاء Q غير تام... فإذا عرفنا دالة
بحيث يحافظ على المسافات بين Q و مجموعة
Q بالتالي سينتج لدينا الفضاء المتمم لـ Q
وهو R .. بسبب وجود التطبيق التقابلي
إن العدد الحقيقي هو عنصر المقطع العادي
وبالتالي كل عدد عادي هو عدد حقيقي

• كل فضاء غير تام له فضاء متمم



إذا عرفنا المسافة بين x و y وفق المسافة المعرفة في X فإنها ستكون مساوية للمسافة بين الصور وفق المسافة المعرفة في $\hat{X}$

أي: $d(x,y) = \hat{d}(Tx, Ty)$

إذا تحققت المساواة السابقة فإننا نقول عن التطبيق T إنه ايزومتري

"حيث الايزومتري هو تطبيق يحافظ على المسافات"

⊕ الفضاءات الايزومتريين

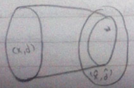
تقول عن فضاءين انهما ايزومتريين اذا وجد تطبيق ايزومتري حيث التطبيق تقابلي.

لذا فالفضاءات الايزومترية قد تختلف في الأكثر بطبيعة عناصرها فقط لكن لا يمكن تمييز بعضها عن الآخر بوجهة نظر المترك "بالرغم من اختلاف العناصر لأن الفضاءين ايزومتريين هناك تطابق بينهم" في أي دراسة إذا لم تدخل فيها طبيعة العنصر

برهان غير مطلوب

⊕ مبرهنة الاتمام:

يوجد لكل فضاء متري غير تام (X, d) فضاء متري تام $(\hat{X}, \hat{d})$ بحيث يحوي فضاء جزئي W يكون ايزومتري مع X



W و X ايزومترية

سـ كيف $\hat{x}$ أي ($\bar{\omega} = \hat{x}$)

وبالتالي هذا الفضاء وحيد اذا

ذخرضنا الاخر من الفضاءات الاخرى المزودة

الاخرى.

مثال: $\mathbb{R}$ فضاء لـ $\mathbb{Q}$

• فضاء كثيرات الحدود P متمم

$C[a,b]$.

ملاحظة: السلسلة $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

نستطيع استنتاج كل كثير حدود من هذه

القاعدة السابقة مثلاً

$P(x) = 1 + 5x$

~~[illegible]~~

• $(C[0,1], d)$

$d = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$

هو فضاء غير تام متممه هو فضاء

الدوال القابلة للمكاملة ريمانياً

ملاحظة:

كل ~~[illegible]~~ دالة قابلة للمكاملة ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ ريمانياً ...

المحاضرة العاشرة يوم الثلاثاء 2017/11/?

الفصل الثاني

⊕ الفضاء المتجهي ((الشعاعي)):

هو مجموعة X نزود عليها عمليتي

الجمع والضرب بعدد حيث العدد من حقل

K ويرمز له بـ $(X, +, \cdot)$.

ملاحظة:

العناصر (الاعداد) التي يجب أن نضرب بها هي

حقل الاعداد الحقيقية أو حقل الاعداد

العقدية. في حال اخذناها من حقل

الاعداد الحقيقية نسمي فضاء متجهي حقيقي

"وهو الاكثر استخداماً". في حال أخذنا

الاعداد من حقل الاعداد العقدية فإننا

نسمي الفضاء المتجهي بالفضاء المتجهي العقدي

$\forall x, y \in X : x + y \in X$

حيث يكون الجمع تبديلي وتجميعي

اما الضرب بعدد

$\forall x \in X, \ \alpha, \beta \in K$

$[\alpha . x]$

يحقق الخاصة التجميعية والتوزيع مع

الجمع

$\alpha . (\beta . x) = (\alpha . \beta) . x$

أمثلة

⊕ $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$

فضاء متجهي على $\mathbb{R}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$x+y = (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)$

ليس في $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{R}\ ;\ x \in \mathbb{R}^n$

$\alpha \cdot x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \alpha\xi_3, \ldots, \alpha\xi_n)$

ليس في $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$

∘ $(C[a,b], +, \cdot)$

فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ "يمكن أن نقول فضاء متجهي"

$x, y \in C[a,b]$

في $\mathbb{R}$

$(x+y)(t) = x(t)+y(t)$

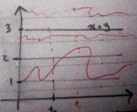
$(\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t)$

عدد ثابت من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$

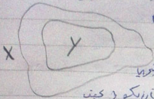
برهنت إنه فضاء متجهي

نجمع الدوال هندسيا: نأخذ نقطة t_0 في كل دالة ونجمع الأولى مع الثانية ينتج $[x+y]$

ملاحظة:



⊕ الفضاءات الجزئية المتجهية



$Y \subseteq X$ لا نستطيع أن نقول مباشرة إنه Y فضاء متجهي جزئي من X يجب أن يكون كيف شرط الفضاء المتجهي أيضا. يمكن مثل الفضاءات الجزئية

- في حال $Y = X$ يسمى الفضاء جزئي غير فعلي

"أي إذا كان الفضاء الجزئي هو نفس الفضاء"

⊕ التركيب الخطي:

لو أخذ (عناصر - نقاط - أشعة ...) عددها منتهيا n وشكلنا منها المجموع

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_n x_n$

$x_i \in X \quad ; i = 1, 2, \ldots n$

$\alpha_i \in K \quad ; \forall i = 1, 2, \ldots n$

ونسمي المجموع السابق بالتركيب الخطي.

في حال وجدنا أن التركيب السابق يساوي الصفر فإذا اقتضى ذلك أن جميع الأمثال α_i أصفارا ندعو الجملة عندها بالمستقلة خطيا.

وإذا وجد واحد على الأقل $\alpha_i \neq 0$ $\forall i, \ldots, n$ فإن الجملة تسمى مرتبطة خطيا.

حالة خاصة: في $\mathbb{R}^2$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} x_2$

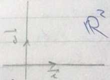
وهذا يدل على التوازي وبالتالي
مرتبطة خطياً...

[التمارين مطلوبة بالكتاب]

الفضاءات المنتهية منتهية الأبعاد
وغير منتهية الأبعاد

اذا وجدنا في الفضاء n متجهات
مستقلة خطياً وأي متجه من الفضاء
يكتب بدلالة هذه الأسنة (أي
هذه الأسنة تولد الفضاء كله)
فإننا نسمي هذه الجملة بقاعدة الفضاء

مثال: $\mathbb{R}^2$



نستطيع كتابة أي متجه بدلالة $\vec{i}$ أو $\vec{j}$
وبذلك نسمي $[\vec{i}, \vec{j}]$ بقاعدة الفضاء $\mathbb{R}^2$
بما أن المتجهين متعامدين وطويلة كل
منهما (1) فإننا نسميها قاعدة متعامدة
منظمة. (السنة وحيدة // ويكون
$\dim \mathbb{R}^2 = 2$]

لأننا وجدنا قاعدة عدد عناصرها 2
وبعد الفضاء 2..

* كل فضاء له قاعدة منتهية يكون
منتهي الأبعاد..

مثال: P فضاء كثيرات الحدود..
هذا فضاء غير منتهي الأبعاد لأننا
نستطيع ايجاد قاعدة مولدة له
هي

$[1, x, x^2, x^3, \dots, x^n]$

عدد عناصرها غير منتهي الأبعاد

ℓ^∞ فضاء عددي

أيضاً غير منتهي الأبعاد وقاعدته

$(1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

$(0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

$(0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

$\vdots$

$(0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$

مبرهنة

"بعد الفضاء الجزئي"

ليكن X فضاء بعده n أي فضاء
جزئي منه (Y) سوف يكون
له بعد أصغر من n

ان $\dim X = n$ نجد حالات:

اولاً: في حال $n = 0$

$\Rightarrow X = \{0\}$

وهذا لا يحوي فضاء جزئي فعلي

ثانياً: في حال $\dim Y = 0$

$\Rightarrow Y = \{0\}$

وبالتالي Y فضاء جزئي فعلي خاص لان $\dim X \geq 1 \Leftarrow x \neq y$

$\dim Y = 0 \Rightarrow \dim X > \dim Y$

ثالثاً: بالحالة العامة نفرض $\dim Y = n$ وبالتالي سيشكل قاعدة لـ X ومنه $X = Y$ وهذا ينافي كون Y فضاء جزئي فعلي $\Leftarrow$

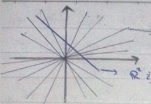
$\dim Y \neq n$

لان القاعدة مستقلة خطياً ~~...~~ قاعدة
لا تستطيع تشكيل فرع n عنصر وهم عناصر
Y مما يبين ان $X = Y$"

ملاحظات ونتائج

1. الفضاء $\mathbb{R}$ يحوي الفضاء الجزئي الفعلي الوحيد هو $\{0\}$

2. $\mathbb{R}^2$: يحوي عدد كبير جداً من الفضاءات الجزئية الفعلية ...



فضاءات جزئية فعلية من $\mathbb{R}^2$

ليس فضاء جزئي في $\mathbb{R}^2$

لو اخذنا أي خط ليس فضاء جزئي بل هو مجموعة جزئية

لو أخذنا كامل $\mathbb{R}^2$ باستثناء نقطة منه هو ليس فضاء جزئي

لانه مستحيل ... ان يكون هناك ناتج هو تلك النقطة

⊕ الفضاءات المنظمة:

لا يمكن أن يكون الفضاء منظماً إلا إذا كان شعاعياً أولاً.

لـ النظيم: Norm

$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \|x\|$

$N_1 : \|x\| \geq 0$

$N_2 : \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

$N_3 : \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$

$N_4 : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

وبالتالي $(X, \|.\|)$ يكون فضاء منظم

"لاثبات نظيم لا بد من اثبات صحتها"

لانه نريد ... N_3 و N_1 ... ان يكون N_4 من الفضاء X

أي نظيم يولد مترك ولكن ليس كل مترك يولد نظيم

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

• كل فضاء منظم هو فضاء متري

ملاحظة

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$$

أثبت ذلك...

كل نظيم هو تطبيق مستمر (دالة مستمرة)

الدالة هي تطبيق مستمر على $\mathbb{R}$

اثبت ذلك

أمثلة: في $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}$$

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$$

في ℓ^p:

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i|^p\Big)^{1/p}$$

في ℓ^∞:

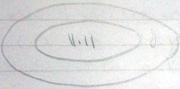
$$\|x\| = \sup_{i\ge 1} |\xi_i|$$

ع

في $C[a,b]$:

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|$$

- نقول عن فضاء منظم إنه تام إذا كان تام بخصوص المترك المولد من النظيم



السهت الحاجزة
اكعس