المحاضرة السابعة. الاثنين

2015 / 11 / 12

⊕ حل المعادلات العقدية من الدرجة الثانية

$$az^2 + bz + c = 0 \quad : a \neq 0.$$

$$a\left(z^2 + \frac{b}{a}z\right) + c = 0$$

نتمم الى مربع تام

$$a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = 0$$

$$a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

عدد عقدي

نستفيد من δ جذر تربيعي لـ Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2$$

نعوض

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right) = 0$$

ملاحظة
لا يفضل استخدام
الرمز ($\sqrt{\ }$) للجذر
لاننا في $\mathbb{R}$ كان
جذره ما داخله
دائما موجب وهنا
ممكن أن يكون
الداخل سالب

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} \end{cases}$$

تمرين: أوجد جذور المعادلة

$$z^4 + z^2 + 1 = 0$$

نفرض $w = z^2$ نجد

$$w^2 + w + 1 = 0$$

$$\Delta = (1) - 4(1)(1) = -3$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{3}\, i$$

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}\, i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$w_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\, i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = w_1$$

نفرض

$$z = r \operatorname{cis} \varphi$$

جذر لـ w_1 ونكتب w بالشكل المثلثي

$$r_w = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{2}} = 1$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow (r \operatorname{cis} \varphi)^2 = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \ : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{3} + \pi k \ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) & : k = 0 \\ z_2 = \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) & , k = 1 \end{cases}$$

Alnour

$w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ،

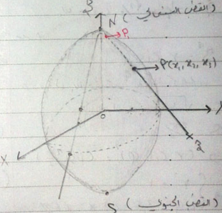
$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ،

ونكمل الطالب بـ z_1 و z_3

تمرين:

أثبت أنه إذا كانت الأمثال حقيقية للمعادلة: $az^2+bz+c=0$
فإن الجذران مترافقان [وظيفة]

⊕ التمثيل الكروي للأعداد العقدية
[الإسقاط المجسامي]



نزود الفضاء الثلاثي البعد بجملة إحداثيات متعامدة $oxyz$. لنمثل الأعداد العقدية بالمستوي oxy مستوي الأعداد العقدية
المستوي العقدي

لنأخذ ~~...~~ الدائرة الواحدية التي مركزها المبدأ ونصف قطرها الواحد.
ولنأخذ الكرة الواحدية بالفضاء التي مركزها المبدأ ونصف قطرها الواحد.

$S^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$

معادلة السطح الكروي (القشرة الكروية)

وليكن $z=x+iy$ عدد عقدي ع المستوي العقدي.
نصله مع القطب الشمالي وليكن P نقطة التقاطع بين المستقيم المار من z و N ونسمي P بالنقطة الممثلة للعدد العقدي z على الكرة.

ملاحظة: ممكن أن يكون العدد العقدي داخل الدائرة الواحدية ~~...~~ أو خارج
ونسمي هذه الكرة والتي تمثل كل الأعداد العقدية بكرة ريمان.

نلاحظ لو أخذنا نقطة من الكرة ثم وصلناها مع القطب الشمالي ثم مددنا بالعكس سوف تقطع المستوي العقدي بنقطة واحدة فقط. لأنه إذا تقاطع مستقيم مع مستوي في أكثر من نقطة فهو واقع فيه، أما هنا القطب الشمالي خارج المستوي العقدي

لذلك كل نقطة من المستوي العقدي يقابل نقطة وحيدة من كرة ريمان والعكس صحيح باستثناء القطب الشمالي.

بالنتيجة، إن الطيف الذي يقرن بكل عدد عقدي (من المستوي العقدي) ~~بالنقطة~~ ~~النقطة~~ بالنقطة الممثلة له من كرة ريمان هو تقابل : $S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$

✦ إن النقاط الممثلة للأعداد الواقعة داخل دائرة الواحدة تقع من القسم السفلي من دائرة ريمان

✦ نقاط نصف الكرة ريمان العلوية تقابل اعداد عقدية خارج دائرة الواحدة

✦ القطب الشمالي هو النقطة الممثلة للعدد (العدد العقدي الصفري) ومنه لو حددنا الصفر سنقطع الكرة بالقطب الجنوبي.

نسمي التقابل السابق بالتقابل ~~[illegible]~~ العكسادي (الستيريوغرافي).

✦ لا يوجد للقطب الشمالي مقابل في المستوي العقدي وفق الإسقاط العكسادي.

✦ لتكن P_1 نقطة مجاورة للقطب الشمالي ويجعلها تسعى نحوه أي $P_1 \longrightarrow N$

عندئذ الصورة لـ P في المستوي العقدي تسعى الى اللانهاية [توسعة لتشمل ∞] بالتالي صورة القطب الشمالي تقع في التوسع للمستوي العقدي (الممدد) هو (∞) أي صورته تقع في

رمز المستوي الممدد: $[\mathbb{C} \cup \infty]$ أو $\mathbb{C}_\infty$

✦ صورة دائرة مارة بالقطب الشمالي هي مستقيم بالمستوي العقدي [اثبت ذلك]

قبل اثبات ذلك يجب اثبات هذا

أوجد العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية للعدد العقدي (القسم الحقيقي والقسم التخيلي) وبين احداثيات النقطة الممثلة لذلك العدد على كرة ريمان. الفكرة

نفرض إن العدد العقدي بالمستوي يكتب بالشكل $z(x,y,0)$ نوجد معادلة المستقيم بالفضاء

$$\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right) \ldots (*)$$

نفصل أحد المعادلات الوسيطية أي نجعل (*) مساوية لـ t ونناقش ثلاث معادلات مع t

الحل مع الطالب

انتهت المحاضرة