WWW.facebook.com/primavira33

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

البنى الجبرية (1)

المحاضرة الثامنة

تاريخ المحاضرة: 3/11/2015

مدرس المقرر: د. حمزة الحاكي

مكتبة بريما فيرا – مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

مُبرهنة: لتكن G زمرة ، ولتكن H زمرة جزئية في G ، وليكن $a,b \in G$ عنصرين كيفيين. عندئذٍ تكون القضايا التالية صحيحة:

-1 $a \in a \cdot H$

-2 $a \cdot H = H$ عندما وفقط عندما $a \in H$

-3 إما $a \cdot H \cap b \cdot H = \phi$ أو $a \cdot H = b \cdot H$

-4 $a \cdot H = b \cdot H$ عندما وفقط عندما $b^{-1} \cdot a \in H$

-5 $a \cdot H$ زمرة جزئية في G عندما وفقط عندما $a \in H$

البرهان:

-1 بما أن H زمرة جزئية في G فهي زمرة بحد ذاتها بالتالي فإن المحايد بالنسبة للعملية " $\cdot$ " موجود في H أي $e \in H$.

من أجل أي عنصر كيفي a من الزمرة G نستطيع كتابة

$$a = a \cdot e$$

(لأن e محايد في الزمرة G بالنسبة للعملية ".")

وهو المطلوب $a \in a \cdot H$ $\Rightarrow$ $a \cdot e \in a \cdot H$ $\Rightarrow$ $e \in H$

($\Rightarrow$ بالاستفادة مما سبق ؛ $\Rightarrow$ استناداً لتعريف المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية H في الزمرة G والمولدة بالعنصر a)

-2

$\Leftarrow$ ليكن $a \in G$ كيفي ، ولنفرض أن $a \cdot H = H$ ، ولنثبت أن $a \in H$. ($\Leftarrow$ لزوم الشرط)

لدينا فرضاً $H = a \cdot H$ $\Rightarrow$ $e \in H = a \cdot H \Rightarrow e \in a \cdot H$ ($\Rightarrow$ كون H زمرة)

من الأخيرة نستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h \in H$ بحيث

$$e = a \cdot h \quad \dots (1)$$

بما أن H زمرة فيوجد للعنصر h مقلوب h^{-1} في H بالنسبة للعملية " $\cdot$ " ويتحقق

$$e = h^{-1} \cdot h \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

وهو المطلوب $a \in H$ $\Rightarrow$ $a = h^{-1}$ $\Rightarrow$ $a \cdot h = h^{-1} \cdot h$

($\Rightarrow$ كون $h^{-1} \in H$ ؛ $\Rightarrow$ كون H زمرة فانظر للمحاضرة السادسة صـ2 فتجد أن قانون الاختصار من اليسار محقق)

$\Rightarrow$ ليكن $a \in G$ كيفي ، ولنفرض أن $a \in H$ ، ولنثبت أن $a \cdot H = H$.
كفاية الشرط

لنأخذ عنصر كيفي $x \in a \cdot H$ بالتالي نستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h \in H$ بحيث

$$x = a \cdot h$$

$$\left.\begin{array}{l} a \in H \text{ فرضاً} \\ and \\ h \in H \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot h \in H \Rightarrow x \in H$$

$\Rightarrow$ كون H زمرة فهي مغلقة بالنسبة للعملية "$\cdot$"

$\Rightarrow$ بالاستفادة مما سبق

أخذنا عنصر كيفي x من $a \cdot H$ و وجدنا أن x موجود في H مما يعني أن

$$a \cdot H \subseteq H \quad \dots (1)$$

لنأخذ عنصر كيفي $h \in H$ وبما أن H زمرة فإن $e \in H$ ويتحقق

$$h = e \cdot h \underset{\cup}{=} h = (a \cdot a^{-1}) \cdot h \underset{\cup}{=} h = a \cdot (a^{-1} \cdot h)$$

$\underset{\cup}{=}$ كون $a \in H$ و H زمرة ويكون $a \cdot a^{-1} = e$ فإن $a^{-1} \in H$

$\underset{\cup}{=}$ كون H زمرة فالعملية "$\cdot$" تجميعية على عناصر H

$$\Rightarrow h \in a \cdot H$$

$\Rightarrow$ بما أن $h \in H$ و $a^{-1} \in H$ فيكون $a^{-1} \cdot h \in H$ وبالتالي نجد استناداً لتعريف المرافقة اليسارية للزمرة الجزئية H في الزمرة G والمولدة بالعنصر a

أخذنا عنصر كيفي h من H و وجدنا أن h موجود في $a \cdot H$ مما يعني أن

$$H \subseteq a \cdot H \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن

$$H = a \cdot H$$ وهو المطلوب

3– من أجل أي عنصرين كيفيين $a, b \in H$ لدينا

$$a \cdot H \underset{\cup}{\subseteq} G \quad and \quad b \cdot H \underset{\cup}{\subseteq} G$$

$\underset{\cup}{\subseteq}$ من تعريف المرافقة اليسارية

$\underset{\cup}{\subseteq}$ من تعريف المرافقة اليسارية

- إذا كان $a \cdot H \cap b \cdot H = \phi$ فيتم المطلوب.

- لنفرض أن $a \cdot H \cap b \cdot H \neq \phi$ ولنثبت أن $a \cdot H = b \cdot H$.

بما أن $a \cdot H \cap b \cdot H \neq \phi$ فيوجد عنصر واحد على الأقل $d \in a \cdot H \cap b \cdot H$ ومن ثم "استناداً لتعريف التقاطع" نجد أن

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

$$d \in a \cdot H \quad and \quad d \in b \cdot H$$

بما أن $d \in a \cdot H$ فيوجد "بحسب تعريف المرافقة اليسارية" عنصر $h_1 \in H$ بحيث

$$d = a \cdot h_1 \quad \dots (1)$$

و بما أن $d \in b \cdot H$ فيوجد "بحسب تعريف المرافقة اليسارية" عنصر $h_2 \in H$ بحيث

$$d = b \cdot h_2 \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$a \cdot h_1 = b \cdot h_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } H \text{ زمرة} \\ \text{فيوجد للعنصر } h_1 \text{ مقلوب } h_1^{-1} \text{ في } H \\ "}} (a \cdot h_1) \cdot h_1^{-1} = (b \cdot h_2) \cdot h_1^{-1}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة و } a,b,h_1,h_1^{-1},h_2 \in G \\ \text{فالعملية "." تجميعية على عناصر } G}} a \cdot (h_1 \cdot h_1^{-1}) = b \cdot (h_2 \cdot h_1^{-1}) \underbrace{\Rightarrow}_{h_1 \cdot h_1^{-1} = e} a \cdot e = b \cdot (h_2 \cdot h_1^{-1})$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{e \text{ محايد}}} a = b \cdot (h_2 \cdot h_1^{-1}) \Rightarrow a \cdot H = b \cdot (h_2 \cdot h_1^{-1}) \cdot H$$

لكن بما أن h_1^{-1} و h_2 من H وأن H زمرة فإن $h_2 \cdot h_1^{-1}$ من H وبالتالي **"استناداً لـ 2−"** فإن

$$(h_2 \cdot h_1^{-1}) \cdot H = H$$

بالعودة نجد أن

$$a \cdot H = b \cdot H$$ وهو المطلوب

-4

$\underbrace{\Leftarrow}_{\text{لزوم الشرط}}$ ليكن $a, b \in G$ كيفيين ، ولنفرض أن $a \cdot H = b \cdot H$ ، ولنثبت أن $b^{-1} \cdot a \in H$.

$$a \in a \cdot H \underbrace{=}_{\text{فرضاً}} b \cdot H \Rightarrow a \in b \cdot H \quad \text{بالاستفادة من } -1$$

من الأخيرة نستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h_0 \in H$ بحيث

$$a = b \cdot h_0$$

بما أن G زمرة فيوجد للعنصر b مقلوب b^{-1} في G بالنسبة للعملية " $\cdot$ " ومنهُ يكون

$$b^{-1} \cdot a = b^{-1} \cdot (b \cdot h_0) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة} \\ \text{فالعملية "." تجميعية على عناصر } G}} b^{-1} \cdot a = (b^{-1} \cdot b) \cdot h_0$$

$$\underset{b^{-1}\cdot b=e}{\Rightarrow} \quad b^{-1}\cdot a = e\cdot h_0 \quad \underset{e\ \text{محايد}}{\Rightarrow} \quad b^{-1}\cdot a = h_0$$

وهو المطلوب $\quad b^{-1}\cdot a \in H \ \Rightarrow \ h_0 \in H$ بما أن

$\underset{\text{كفاية الشرط}}{\Leftarrow}$ ليكن $a,b \in G$ كيفيين ، ولنفرض أن $b^{-1}\cdot a \in H$ ، ولنثبت أن $a\cdot H = b\cdot H$.

بما أن $b^{-1}\cdot a \in H$ فنستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h_1 \in H$ بحيث

$$b^{-1}\cdot a = h_1 \ \Rightarrow b\cdot(b^{-1}\cdot a) = b\cdot h_1 \quad \underset{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة}\\ \text{فالعملية "}\cdot\text{" تجميعية على عناصر } G}}{\Rightarrow} \quad (b\cdot b^{-1})\cdot a = b\cdot h_1$$

$$\underset{b\cdot b^{-1}=e}{\Rightarrow} \quad e\cdot a = b\cdot h_1 \quad \underset{e\ \text{محايد}}{\Rightarrow} \quad a = b\cdot h_1 \quad \underset{\substack{\text{استناداً لتعريف}\\ \text{المرافقة اليسارية}}}{\Rightarrow} \quad a \in b\cdot H$$

ونعلم بحسب (1) أن $a \in a\cdot H$

أصبح لدينا $\left.\begin{matrix} a \in a\cdot H \\ and \\ a \in b\cdot H \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\cdot H \cap b\cdot H \neq \phi \quad \underset{\text{بحسب } 3-}{\Rightarrow} \quad a\cdot H = b\cdot H$ وهو المطلوب

-5

$\underset{\text{لزوم الشرط}}{\Rightarrow}$ ليكن $a \in G$ كيفي ، ولنفرض أن $a\cdot H$ زمرة جزئية في G ، ولنثبت أن $a \in H$.

بما أن $a\cdot H$ زمرة جزئية في G فإن المحايد بالنسبة للعملية " $\cdot$ " موجود في $a\cdot H$ أي $e \in a\cdot H$.

بما أن $e \in a\cdot H$ فنستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h \in H$ بحيث

$$e = a\cdot h \quad \underset{\substack{\text{كون } H \text{ زمرة فيوجد للعنصر } h \text{ مقلوب } h^{-1}\\ \text{بالنسبة للعملية "}\cdot\text{"}}}{\Rightarrow} \quad e\cdot h^{-1} = (a\cdot h)\cdot h^{-1}$$

$$\underset{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة}\\ \text{فالعملية "}\cdot\text{" تجميعية على عناصر } G}}{\Rightarrow} \quad e\cdot h^{-1} = a\cdot(h\cdot h^{-1}) \quad \underset{h\cdot h^{-1}=e \text{ و } e \text{ محايد}}{\Rightarrow} \quad h^{-1} = a\cdot e \quad \underset{e\ \text{محايد}}{\Rightarrow} \quad h^{-1} = a$$

وهو المطلوب $\quad h^{-1} \in H \ \Rightarrow a \in H$

$\underset{\text{كفاية الشرط}}{\Rightarrow}$ ليكن $a \in G$ كيفي ، ولنفرض أن $a \in H$ ، ولنثبت أن $a\cdot H$ زمرة جزئية في G.

بما أن $a \in H$ فنجد **"استناداً لـِ $2-$ "** أن $a\cdot H = H$ ، وبما أن H زمرة جزئية في G فإن $a\cdot H$ زمرة جزئية في G. **وهو المطلوب.**

- **تجدر الإشارة** إلى أن المبرهنة السابقة تبقى صحيحة إذا كانت المرافقات يمينية. أي أن خواص المرافقات اليسارية السابقة تبقى صحيحة من أجل المرافقات اليمينية للزمرة الجزئية H في G.

اتبع نفس خطوات الإثبات السابق وهو سهل جداً فلا تبخل على نفسك في ذلك ويترك وظيفة

مُبرهنة: لتكن G زمرة ، ولتكن H زمرة جزئية في G. عندئذٍ يتحقق

1– آياً كان العنصرين $a, b \in G$ فإن

$$card\ a \cdot H = card\ b \cdot H = card\ H$$

2– لنفرض أن M_R مجموعة المرافقات اليمينية للزمرة الجزئية H في الزمرة G أي

$$M_R = \{H \cdot a \ : \ a \in G\}$$

ولنفرض أن M_L مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في الزمرة G أي

$$M_L = \{a \cdot H \ : \ a \in G\}$$

عندئذٍ فإن:

$$card\ M_R = card\ M_L$$

3– إن المجموعة M_L تُشكل تجزئة للمجموعة G ، وكذلك الأمر بالنسبة للمجموعة M_R.

البرهان:

1– لنفرض أن $a, b \in G$ عنصرين كيفيين ، ولنعرف العلاقة

$$f: a \cdot H \longrightarrow b \cdot H$$

بالشكل:

$$f(a \cdot h) = b \cdot h \quad ; \quad \forall\, a \cdot h \in a \cdot H$$

- لنثبت أن العلاقة f تمثل تطبيق.

لنأخذ عنصرين كيفيين $a \cdot h_1 , a \cdot h_2 \in a \cdot H$ بحيث أن $a \cdot h_1 = a \cdot h_2$.

$$a \cdot h_1 = a \cdot h_2 \underset{\text{كون } G \text{ زمرة فانظر للمحاضرة السادسة صـ2 فتجد أن قانون الاختصار من اليسار محقق}}{\Rightarrow} h_1 = h_2 \Rightarrow b \cdot h_1 = b \cdot h_2$$

$$\underset{\text{من قاعدة ربط العلاقة } f}{\Rightarrow} f(a \cdot h_1) = f(a \cdot h_2)$$

أخذنا عنصرين كيفيين $a \cdot h_1 , a \cdot h_2 \in a \cdot H$ بحيث أن $a \cdot h_1 = a \cdot h_2$ ووجدنا أن $f(a \cdot h_1) = f(a \cdot h_2)$ وبالتالي العلاقة f هي تطبيق.

- لنثبت أن التطبيق f متباين.

لنأخذ عنصرين كيفيين $a\cdot h_1 , a\cdot h_2 \in a\cdot H$ بحيث أن $f(a\cdot h_1)=f(a\cdot h_2)$.

$$f(a\cdot h_1)=f(a\cdot h_2) \underset{\text{من قاعدة ربط العلاقة } f}{\Rightarrow} b\cdot h_1=b\cdot h_2 \underset{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة فانظر للمحاضرة السادسة صـ2}\\ \text{فتجد أن قانون الاختصار من اليسار محقق}}}{\Rightarrow} h_1=h_2$$

$$\Rightarrow a\cdot h_1 = a\cdot h_2$$

أخذنا عنصرين كيفيين $a\cdot h_1 , a\cdot h_2 \in a\cdot H$ بحيث أن $f(a\cdot h_1)=f(a\cdot h_2)$ ووجدنا أن $a\cdot h_1 = a\cdot h_2$ وبالتالي التطبيق f متباين.

- لنأخذ عنصر كيفي $y\in b\cdot H$ عندئذٍ نستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h_0\in H$ بحيث

$$y=b\cdot h_0$$

بما أن $h_0\in H$ فإن " بحسب تعريف المرافقة اليسارية" $a\cdot h_0\in a\cdot H$ ، والأكثر من ذلك:

$$f(a\cdot h_0) \underset{\text{من قاعدة ربط } f}{=} b\cdot h_0$$

أخذنا عنصر كيفي $y=b\cdot h_0\in b\cdot H$ و وجدنا عنصر $x=a\cdot h_0\in a\cdot H$ بحيث $f(x)=y$ وهذا يعني أن التطبيق f غامر.

من كل ما سبق نستنتج أن العلاقة f التي قمنا بتعريفها هي تطبيق وهذا التطبيق متباين وغامر أي هو تقابل وهذا بدوره يُكافئ أن المجموعتين $a\cdot H$ و $b\cdot H$ متساويتين بالقدرة أي

$$card\ a\cdot H = card\ b\cdot H \quad \dots *$$

المساواة السابقة مُحققة من أجل كُل العناصر $a,b\in G$ بما فيها $b=\underset{\text{المحايد}}{e}$ أي

$$card\ a\cdot H = card\ e\cdot H \underset{\substack{\text{كون } H \text{ زمرة جزئية في } G\\ \text{فإن } e\in H \text{ ومن ثم نجد استناداً للمبرهنة السابقة}\\ \text{أن } e\cdot H=H}}{\Rightarrow} card\ a\cdot H = card\ H \quad \dots **$$

من * و ** نجد أن

$$card\ a\cdot H = card\ b\cdot H = card\ H$$ وهو المطلوب

2– لنفرض أن $a,b\in G$ عنصرين كيفيين ، ولنعرف العلاقة

$$g: M_R \longrightarrow M_L$$

بالشكل:

$$g(H\cdot a)=a^{-1}\cdot H \quad ; \quad \forall\ H\cdot a\in M_R$$

- لنثبت أن العلاقة g تمثل تطبيق.

لنأخذ عنصرين كيفيين $H\cdot a\ ,H\cdot b\in M_R$ بحيث أن $H\cdot a=\ H\cdot b$.

$$a\in H\cdot a \underbrace{=}_{\text{فرضاً}} H\cdot b \Rightarrow\ a\in H\cdot b \quad \text{" بحسب المبرهنة السابقة "}$$

بما أن $a\in H\cdot b$ فنستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليمينية" أنهُ يوجد عنصر $h\in H$ بحيث

$$a=h\cdot b \underbrace{\Rightarrow}_{\text{كون } G \text{ زمرة}} a^{-1}=(h\cdot b)^{-1} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة}\\ \text{فانظر للتمهيدية الأولى}\\ \text{من المحاضرة السادسة صـ 2}}} a^{-1}=b^{-1}\cdot h^{-1}$$

$$\Rightarrow a^{-1}\cdot H=b^{-1}\cdot h^{-1}\cdot H$$

لكن بما أن h من H وأن H زمرة فإن h^{-1} من H وبالتالي "استناداً لـِ 2– من المبرهنة السابقة" فإن

$$h^{-1}\cdot H=H$$

بالعودة نجد أن

$$a^{-1}\cdot H=b^{-1}\cdot H \underbrace{\Rightarrow}_{\text{من قاعدة ربط } g} g(H\cdot a)=g(H\cdot b)$$

أخذنا عنصرين كيفيين $H\cdot a\ ,H\cdot b\in M_R$ بحيث أن $H\cdot a=H\cdot b$ ووجدنا أن $g(H\cdot a)=g(H\cdot b)$ وبالتالي العلاقة g هي تطبيق.

- لنثبت أن التطبيق g متباين.

لنأخذ عنصرين كيفيين $H\cdot a\ ,H\cdot b\in M_R$ بحيث أن $g(H\cdot a\ )=g(\ H\cdot b)$.

$$g(H\cdot a\ )=g(\ H\cdot b) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{من قاعدة ربط العلاقة } g}} a^{-1}\cdot H=b^{-1}\cdot H$$

$$a^{-1}\in a^{-1}\cdot H \underbrace{=}_{\text{فرضاً}} b^{-1}\cdot H \Rightarrow\ a^{-1}\in b^{-1}\cdot H \quad \text{بالاستفادة من المبرهنة السابقة}$$

من الأخيرة نستنتج "استناداً لتعريف المرافقة اليسارية" أنهُ يوجد عنصر $h_1\in H$ بحيث

$$a^{-1}=b^{-1}\cdot h_1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{كون } G \text{ زمرة}} (a^{-1})^{-1}=(b^{-1}\cdot h_1)^{-1} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة فاستفد من التمهيدية الأولى و الثانية}\\ \text{في المحاضرة السادسة صـ 2 و صـ4}}}$$

$$a=h_1^{-1}\cdot(b^{-1})^{-1} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{عاود الاستفادة من التمهيدية الثانية}\\ \text{في المحاضرة السادسة صـ 4}}} a=h_1^{-1}\cdot b\Rightarrow\ H\cdot a=H\cdot h_1^{-1}\cdot b$$

لكن بما أن h_1 من H وأن H زمرة فإن h_1^{-1} من H وبالتالي "استناداً للمبرهنة السابقة" فإن

$$H \cdot h_1^{-1} = H$$

بالعودة نجد أن $H \cdot a = H \cdot b$

أخذنا عنصرين كيفيين $H \cdot a , H \cdot b \in M_R$ بحيث أن $g(H \cdot a) = g(H \cdot b)$ ووجدنا أن $H \cdot a = H \cdot b$ وبالتالي التطبيق g متباين.

- لنأخذ عنصر كيفي $y \in M_L$ عندئذٍ نستنتج "استناداً لتعريف عناصر M_L" أنهُ يوجد عنصر $d \in G$ بحيث

$$y = d \cdot H$$

بما أن $d \in G$ و G زمرة فيوجد للعنصر d مقلوب $d^{-1} \in G$ وهذا بدوره يعني أنه توجد المرافقة اليمينية للزمرة الجزئية H في G والمولدة بالعنصر d^{-1} أي توجد

$$H \cdot d^{-1} \in M_R$$

والأكثر من ذلك:

$$g(H \cdot d^{-1}) \underbrace{=}_{\text{من قاعدة ربط } g} (d^{-1})^{-1} \cdot H \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{كون } G \text{ زمرة فاستفد من التمهيدية الثانية} \\ \text{في المحاضرة السادسة صـ 4}}} d \cdot H$$

أخذنا عنصر كيفي $y = d \cdot H \in M_L$ و وجدنا عنصر $x = H \cdot d^{-1} \in M_R$ بحيث $g(x) = y$ وهذا يعني أن التطبيق g غامر.

من كل ما سبق نستنتج أن العلاقة g التي قمنا بتعريفها هي تطبيق وهذا التطبيق متباين وغامر أي هو تقابل وهذا بدوره يُكافئ أن المجموعتين M_R و M_L متساويتين بالقدرة أي

$$card\ M_R = card\ M_L$$ وهو المطلوب

3- لنبرهن أن M_L تُشكل تجزئة للمجموعة أو للزمرة G.

لإثبات ذلك نتحقق من الشروط الثلاثة الواردة في **تعريف التجزئة – المحاضرة الأولى – الصفحة السادسة**.

1) $\forall\ a \cdot H \in M_L \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب المبرهنة السابقة}} a \in a \cdot H \Rightarrow a \cdot H \neq \phi$

"الشرط الأول من شروط التجزئة محقق"

2- لنأخذ $a \cdot H , b \cdot H \in M_L$ بحيث أن $a, b \in G$ عنصرين كيفيين عندئذٍ نجد "بحسب المبرهنة السابقة" أنهُ:

$$a \cdot H = b \cdot H \quad \text{أو} \quad a \cdot H \cap b \cdot H = \phi \quad \text{إما}$$

"الشرط الثاني من شروط التجزئة محقق"

3– إن كُل مجموعة يمكن كتابتها على شكل اجتماع لكل المجموعات الجزئية والوحيدة العنصر منها أي:

$$G = \bigcup_{a \in G} \{a\} \quad ...*$$

$\forall\, a \in G \;\Rightarrow\; \{a\} \subseteq a \cdot H \;\; ; \;\; \forall\, a \in G \;\; a \in a \cdot H$ بحسب المبرهنة السابقة

$$\Rightarrow \bigcup_{a \in G} \{a\} \subseteq \bigcup_{a \in G} a \cdot H$$

بالاستفادة من الأخيرة في * نجد أن:

$$G \subseteq \bigcup_{a \in G} a \cdot H \quad ...(1)$$

هذه من جهة ، ومن جهة أُخرى

$\forall\, a \in G \;\Rightarrow\; \bigcup_{a \in G} a \cdot H \subseteq G \;\; ; \;\; a \cdot H \subseteq G$ نعلم أن $...(2)$

من (1) و (2) نجد أن:

$$G = \bigcup_{a \in G} a \cdot H = \bigcup_{a \cdot H \in M_L} a \cdot H$$

"الشرط الثالث من شروط التجزئة محقق"

مما سبق نستنتج أن المجموعة M_L (مجموعة كُل المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G) تشكل تجزئة للمجموعة G.

- بنفس الطريقة نثبت أن المجموعة M_R (مجموعة كُل المرافقات اليمينية للزمرة الجزئية H في G) تشكل تجزئة للمجموعة G.

وهو المطلوب.

تعريف: لتكن G زمرة **منتهية** ، ولتكن H زمرة جزئية في G. عندئذٍ نسمي قدرة الزمرة G أي $card\ G$ بـِ **مرتبة** الزمرة G ونرمز لهذه المرتبة بـِ $(G : 1)$. أي

$$\underbrace{(G : 1)}_{\substack{\text{مرتبة الزمرة } G \\ \text{المنتهية}}} = \underbrace{card\ G}_{\substack{\text{قدرة الزمرة } G \text{ المنتهية} \\ \text{أو عدد عناصر } G}}$$

وإذا فرضنا أن M هي مجموعة كُل المرافقات اليسارية (أو اليمينية) للزمرة الجزئية H في G فإننا نسمي قدرة M أي $card\ M$ بـِ **دليل** الزمرة الجزئية H في G ونرمز لهذا الدليل بـِ $(G : H)$. أي

$$\underbrace{(G : H)}_{\substack{\text{دليل الزمرة الجزئية } H \\ \text{في الزمرة المنتهية } G}} = \underbrace{card\ M}_{\substack{\text{عدد المرافقات اليسارية (أو اليمينية)} \\ \text{للزمرة الجزئية } H \text{ في الزمرة المنتهية } G}}$$

نتيجة(1): لتكن G زمرة **منتهية**. عندئذٍ فإن

$$a \cdot G = G \quad ; \quad \forall\, a \in G$$

أي لدينا مرافقة يسارية واحدة فقط للزمرة G في نفسها ومن هُنا نستنتج أن دليل G في G هو الواحد أي

$$(G : G) = 1$$

نتيجة(2): لتكن G زمرة **منتهية** ، ولتكن $H = \{e\}$ بحيث e المحايد في G بالنسبة للعملية " $\cdot$ ". عندئذٍ فإن H زمرة جزئية في G ، ويتحقق

$$a \cdot H = \{a\} \quad ; \quad \forall\, a \in G$$

أي لدينا عدد من المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في G وهذا العدد مساوٍ لِـ عدد عناصر الزمرة المنتهية G مما يعني أن دليل الزمرة الجزئية $\underbrace{\{e\}}_{\text{تحوي المحايد فقط}}$ في G يساوي لمرتبة الزمرة G. أي

$$(G : \{e\}) = (G : 1)$$

مُبرهنـــة لاغرانـــج: لتكن G زمرة **منتهية** ، ولتكن H زمرة جزئية في G. عندئذٍ فإن

$$(G : 1) = (G : H).(H : 1)$$

البرهان: نُريد إثبات أن

$$\underbrace{(G : 1)}_{\substack{\text{مرتبة الزمرة } G \\ \text{المنتهية}}} = \underbrace{(G : H)}_{\substack{\text{دليل الزمرة الجزئية } H \\ \text{في الزمرة المنتهية } G}} . \underbrace{(H : 1)}_{\substack{\text{مرتبة الزمرة } H \\ \text{المنتهية لأنها جزئية} \\ \text{من } G \text{ و } G \text{ منتهية}}}$$

بما أن الزمرة G منتهية فرضاً فإن عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية H في G منتهٍ حتماً وسوف يكون أقل من أو يساوي عدد عناصر الزمرة G.

لنفرض أن عدد المرافقات اليسارية **المختلفة** للزمرة الجزئية H في G هو n ، وهذا يعني أن M مجموعة كُل المرافقات اليسارية المختلفة للزمرة الجزئية H في G هي

$$M_L = \{a_1 \cdot H, a_2 \cdot H, a_3 \cdot H, \dots., a_n \cdot H\} \quad ; \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in G$$

نعلم "بحسب المبرهنة الثانية " أن M_L تُشكل تجزئة للزمرة G وهذا يعني أن

$$G = \bigcup_{i=1}^{i=n} a_i \cdot H$$

$$\underbrace{G = a_1 \cdot H \cup a_2 \cdot H \cup \dots \cup a_n \cdot H}_{*}$$

بما أن M_L تُشكل تجزئة للزمرة G فإن:

$$\underbrace{a_i \cdot H \cap a_j \cdot H = \phi \quad ; \ \forall\, i \neq j \ \ and\ i,j = 1,2,3,\dots,n}_{**}$$

بأخذ قدرة الطرفين للمجموعتين المتساويتين في $*$ نحصل على

$$card\ G = card\ (a_1 \cdot H \cup a_2 \cdot H \cup \dots \cup a_n \cdot H) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالاستفادة من}**}$$

$$card\ G = card\ a_1 \cdot H + card\ a_2 \cdot H + \cdots + card\ a_n \cdot H$$

لكن بحسب المبرهنة الثانية من هذه المحاضرة نجد أن:

$$card\ a_i \cdot H = card\ H \quad ; \quad \forall\, a_i \in G \ , \ \ i = 1,2,\dots,n$$

وهذا يعني أن

$$card\ G = \underbrace{card\ H + card\ H + \cdots + card\ H}_{\text{مكررة } n \text{ مرة}} \Rightarrow$$

$$card\ G = n.card(H)$$

وهذا يعني " استناداً لتعريف مرتبة ودليل زمرة " أن

$$(G : 1) = (G : H).(H : 1)$$ وهو المطلوب

مُلاحظـــة: يُمكن صياغة مُبرهنة لاغرانج السابقة بأحد النصوص التالية

1– إن مرتبة أي زمرة منتهية G تقبل القسمة على مرتبة أي زمرة جزئية H فيها.

2– إن مرتبة أي زمرة منتهية G تقبل القسمة على دليل أي زمرة جزئية H فيها.

3– إن دليل أي زمرة جزئية H في زمرة G منتهية يقسم مرتبة الزمرة G.

الزمـــرة الدوارة (الدائريـــة)

مُبرهنة: لتكن G زمرة ، ولتكن S مجموعة جزئية وغير خالية من G. عندئذٍ أثبت أن

1– تقاطع كُل الزمر الجزئية في G والتي كُل زمرة منها تحوي S. هو زمرة جزئية في G تحوي S نرمز لها بـِ $< S >$.

2– إن $< S >$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحوي S.

3– إن $< S >$ عنصر أصغري في مجموعة كُل الزمر الجزئية في G والتي كُل زمرة منها تحوي S.

الإثبات: لنفرض أن $\mathcal{L}$ هي مجموعة كُل الزمر الجزئية في G والتي كُل زمرة منها تحوي S. أي

$$\mathcal{L} = \{K \subseteq G \ : \ \ S \subseteq K \ \ and \ \ \ G \text{ زمرة جزئية في } K\}$$

لدينا

$$S \subseteq K \;\; ; \;\; \forall K \in \mathcal{L} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب تعريف عملية التقاطع}} S \subseteq \bigcap_{K\in\mathcal{L}} K = < S >$$

وإذا راجعنا التمهيدية الموجودة في صـ4 من المحاضرة السابقة لوجدنا أن

$$< S > = \bigcap_{K\in\mathcal{L}} K$$

زمرة جزئية في G. **" إذا أتى السؤال في الامتحان نقوم باتباع نفس خطوات البرهان فتدرب جيداً"**

النتيجة:هي أن تقاطع كُل الزمر الجزئية في G والتي كُل زمرة منها تحوي S هو زمرة جزئية في G تحويS

2– إن

$$\mathcal{L} = \{K \subseteq G \; : \;\; S \subseteq K \;\; and \;\; G \text{ زمرة جزئية في } K\}$$

هي عبارة أسرة (غير خالية لأن $G \in \mathcal{L}$) من المجموعات الجزئية من G ، ونعلم "بحسب المحاضرة الثانية" أن العلاقة " $\subseteq$ " هي علاقة ترتيب جزئي على $\mathcal{L}$.

بحسب تعريف عملية التقاطع نجد أن

$$\bigcap_{K\in\mathcal{L}} K \subseteq K \;\; ; \;\; \forall K \in \mathcal{L} \;\; \Rightarrow \;\; < S > \subseteq K \;\; ; \;\; \forall K \in \mathcal{L}$$

من السطر الأخير نستنتج "استناداً لتعريف العنصر الأصغر في مجموعة مرتبة جزئياً" أن $< S >$ هو عنصر أصغر في المجموعة $\mathcal{L}$ مما يعني أن $< S >$ هي أصغر زمرة جزئية في G تحوي S.

3– بما أن كُل عنصر أصغر هو أصغري في مجموعة مرتبة جزئياً فنستنتج كون $< S >$ عنصر أصغر في $\mathcal{L}$ أن $< S >$ عنصر أصغري في $\mathcal{L}$.

وهو المطلوب

تعريف: لتكن G زمرة ، ولتكن S مجموعة جزئية وغير خالية من G. عندئذٍ نسمي الزمرة $< S >$ **بالزمرة المولدة بالمجموعة S** ، ونسمي عناصر S **بمجموعة مولدات الزمرة** $< S >$.

- إذا كانت المجموعة S منتهية فإننا نقول عن الزمرة $< S >$ أنها **زمرة منتهية التوليد**.
- إذا كانت المجموعة S غير منتهية فإننا نقول عن الزمرة $< S >$ أنها **زمرة غير منتهية التوليد**.
- إذا كانت المجموعة $\{a\}$ $\underbrace{=}_{\text{وحيدة العنصر}}$ S وبحيث $a \in G$ كيفي. أي أن $< S >$ زمرة منتهية التوليد ومولدة بعنصر واحد فقط. عندئذٍ

$$< S > = < a > = \{a^n \; : \;\; n \in \mathbb{Z}\}$$

والأخيرة تسمى بالزمرة الجزئية الدوارة المولدة بالعنصر a.

تعريف (الزمرة الدوارة): نقول عن زمرة ما G أنها زمرة دوارة إذا وجد عنصر $a \in G$ بحيث

$$G = < a >$$

أي إذا وجد عنصر a من G بحيث تكون الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بالعنصر a هي G نفسها.

تمهيدية: لتكن G زمرة ، وليكن $a \in G$ كيفي. عندئذٍ أثبت أن

$$< a > = < a^{-1} >$$

أي أن الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بالعنصر a من G هي نفس الزمر الجزئية الدوارة المولدة بمقلوب العنصر a في G بالنسبة للعملية " . " أي المولدة بـِ a^{-1}.

البرهان: نعلم " راجع المثال الأول من المحاضرة السابقة" أن

$$< a > = \{a^n : \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

هي زمرة جزئية في G.

$a^{-1} \in < a >$ $\Rightarrow$ وضوحاً $a \in < a >$

كون $<a>$ زمرة فيوجد للعنصر a مقلوب في $<a>$ بالنسبة للعملية "." وهو a^{-1}

ونعلم أن

$$< a^{-1} > = \{a^{-n} : \quad n \in \mathbb{Z}\}$$

هي زمرة جزئية في G.

$a \in < a^{-1} >$ $\Rightarrow$ وضوحاً $a^{-1} \in < a^{-1} >$

كون $<a^{-1}>$ زمرة فيوجد للعنصر a^{-1} مقلوب في $<a^{-1}>$ بالنسبة للعملية "." وهو $(a^{-1})^{-1}=a$

أصبح لدينا $\left.\begin{array}{c} a \in < a > \\ and \\ a \in < a^{-1} > \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $< a > \subseteq < a^{-1} > \quad ... (1)$

بحسب التمهيدية السابقة

إن $<a>$ أصغر زمرة جزئية في G تحوي a

أصبح لدينا $\left.\begin{array}{c} a^{-1} \in < a^{-1} > \\ and \\ a^{-1} \in < a > \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $< a^{-1} > \subseteq < a > \quad ... (2)$

بحسب التمهيدية السابقة

إن $<a^{-1}>$ أصغر زمرة جزئية في G تحوي a^{-1}

من (1) و (2) نجد أن:

$$< a > = < a^{-1} >$$ وهو المطلوب

انتهت المحاضرة الثامنة

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob : 0993586758 - Tel : 011\ 2124436$