جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات
السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

مقرر التحليل 3

المحاضرة السادسة

تاريخ المحاضرة: 28/10/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

نتائج من المبرهنة(1):

1– إذا كانت $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية من التوابع المستمرة على I ، وكان تابع النهاية لها $f(x)$ غير مستمر على I فإن تقاربها النقطي من $f(x)$ على I غير منتظم.

2– إذا كانت $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية من التوابع المحدودة على I ، وكان تابع النهاية لها $f(x)$ غير محدود على I فإن تقاربها النقطي من $f(x)$ على I غير منتظم.

3– إذا كانت $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية من التوابع المستمرة على I ، وكان تابع النهاية لها $f(x)$ مستمراً على I فإن تقاربها النقطي من $f(x)$ على I ليس من الضروري أن يكون تقارباً منتظماً.

مثال على النتيجة الثالثة: لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ وبحيث $f_n(x) = x^n$ و $]0,1[= I \ni x$.

إن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I =]0,1[$ من التابع:

$$f(x) = \lim_{n\to +\infty} f_n(x) = \lim_{n\to +\infty} x^n = 0$$

ومن الواضح أن حدود المتتالية التابعية

$$f_1(x) = x\,, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \dots, f_n(x) = x^n, \dots$$

عبارة عن توابع مستمرة على $I =]0,1[$ وأن تابع النهاية لتلك المتتالية والذي هو التابع الصفري $f(x) = 0$ أيضاً مستمرعلى $I =]0,1[$. راجع المثال(3) من المحاضرة الثانية فتجد أن تقارب المتتالية المفروضة من التابع $f(x)$ على المجال $I =]0,1[$ هو تقارب نقطي وغير منتظم.

4– نعلم أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ المعرفة على $I \subseteq \mathbb{R}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على I إذا وفقط إذا وجد لكُل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad ; \quad \forall\, n \geq N_0 \quad , \quad \forall\, x \in I$$

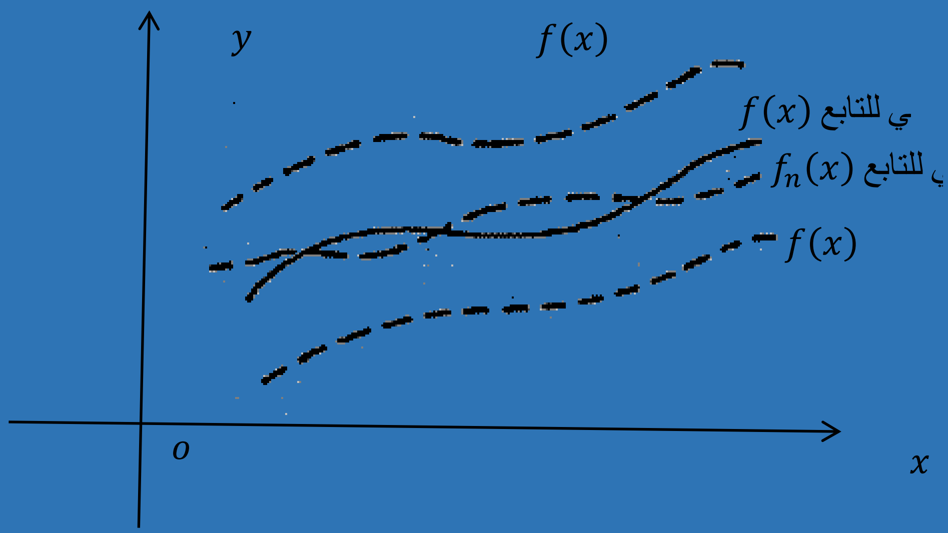
والذي يُكافئ

$$-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < +\varepsilon \quad ; \quad \forall\, n \geq N_0 \quad , \quad \forall\, x \in I$$

والذي بدوره يُكافئ

$$\underbrace{f(x) - \varepsilon < f_n(x) < \varepsilon + f(x) \quad ; \quad \forall\, n \geq N_0 \quad , \quad \forall\, x \in I}_{*}$$

إن مجموعة المتراجحات * تعني أن الخطوط البيانية للتوابع $f_n(x)$ بحيث $n \geq N_0$ تقع داخل شريط عرضه 2ε بين الخطين البيانيين للتابعين $f(x) - \varepsilon\,, f(x) + \varepsilon$ ، حيث يتم الحصول على هذين الخطين البيانيين بانسحاب قدره ε نحو الأسفل وε نحو الأعلى للخط البياني للتابع $f(x)$.



أما في حالة التقارب النقطي غير المنتظم لمتتالية التوابع فلا يمكن أن تقع جميع الخطوط البيانية للتوابع $f_n(x)$ داخل ذلك الشريط اعتباراً من قيمة معينة لـِ n.

ما سبق هو عبارة عن التفسير الهندسي الذي يميز التقارب المنتظم لمتتالية من التوابع عن التقارب الغير منتظم لها.

مبرهنة(2): لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية توابع معرفة ومستمرة على مجال مغلق مثل $I=[a,b]$ وبحيث

$$-\infty < a < b < +\infty$$

ولنفرض أنها متقاربة بانتظام من تابع $f(x)$ على I. عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للمكاملة على المجال I ، وتتحقق العلاقة الآتية:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx$$

الإثبات: بما أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على المجال المغلق I ، وأن حدودها عبارة عن توابع مستمرة على ذلك المجال فإن **"استناداً للمبرهنة(1)"** تابع النهاية لها أي $f(x)$ يكون مستمراً على المجال I ، وبما أنهُ مستمر على المجال المغلق $I=[a,b]$ فيكون قابلاً للمكاملة عليه.

لنثبت الأن على صحة العلاقة المعطاة في نص المبرهنة.

ليكن $\varepsilon>0$ عدد حقيقي موجب وكيفي عندئذٍ $\frac{\varepsilon}{b-a}>0$ أيضاً حقيقي وموجب ، وبما أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I فيوجد من أجل العدد الحقيقي الموجب $\frac{\varepsilon}{b-a}$ عدد طبيعي $N_0=N_0(\varepsilon)\neq 0$ بحيث يتحقق:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \dots *$$

وذلك من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0(\varepsilon)$ ومن أجل جميع قيم x من I.

لدينا:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \underset{\substack{\text{استخدم خواص} \\ \text{التكامل المحدد}}}{\underbrace{=}} \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx\right| \underset{\substack{\text{استخدم خواص} \\ \text{التكامل المحدد}}}{\underbrace{\leq}} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx$$

$$\underset{\substack{\text{استفد من*} \\ \text{ومن خواص} \\ \text{التكامل المحدد}}}{\underbrace{\leq}} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a}[x]_a^b = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

بالتالي من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon)$ بحيث

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0(\varepsilon)$. ومنهُ "استناداً لتعريف النهاية" نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx \underbrace{=} \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx$$

كون المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$
متقاربة بانتظام من $f(x)$ على I
بالتالي فهي متقاربة نقطياً من $f(x)$ على I
أي $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ وذلك لكُل $x \in I$

والأخيرة ما هي إلا العلاقة المطلوب إثباتها.

ملاحظة: إن شرط التقارب المنتظم من $f(x)$ على I للمتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ في المبرهنة (2) هو شرط كافٍ وغير لازم كي تتحقق العلاقة المذكورة في نص المبرهنة(2). أي إذا كانت المتتالية متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ بالإضافة للفرضيات الموجودة فتتحقق العلاقة لكن إذا تحققت العلاقة فقد تكون المتتالية متقاربة بانتظام وقد لا تكون كذلك. وخيرُ دليل هو المثال الآتي:

مثال: لتكن لدينا المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ بحيث

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

و $x \in I = [0,1]$.

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I=[0,1]$ من التابع الصفري $f(x)=0$.

لنفرض جدلاً أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$ على $I=[0,1]$.

لنأخذ العدد الحقيقي الموجب $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ، وبما أن المتتالية متقاربة بانتظام فيوجد من أجل العدد $\varepsilon=\frac{1}{2}$ عدد طبيعي $N_0=N_0\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$ بحيث يتحقق:

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}-0\right|=\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|=\frac{nx}{1+n^2x^2}<\frac{1}{2}$$

من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n\geq N_0$ ومن أجل جميع قيم x من $I=[0,1]$.

وهذا يعني أن ما سبق محقق من أجل قيم n المحققة لِـ $n>N_0>0$ ومن أجل جميع قيم x من $I=[0,1]$

بالتالي محقق من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n>N_0>0$ ومن أجل $x_0=\frac{1}{n}$ من $I=[0,1]$.

أي:

$$\frac{nx_0}{1+n^2x_0^2}=\frac{n\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$$

لكن ما سبق مستحيل أن يكون صحيحاً لأن $\frac{1}{2}\not<\frac{1}{2}$. بالتالي الفرض الجدلي خاطئ و متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً وليس بانتظام من التابع الصفري $f(x)=0$ على $I=[0,1]$.

إن حدود المتتالية التابعية المفروضة هي $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ وهي عبارة عن توابع مستمرة على $I=[0,1]$ وبحيث $n\geq 1$. بالتالي فهي قابلة للمكاملة على ذلك المجال ويكون:

$$\int_a^b f_n(x)dx=\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}dx=\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\right]_0^1=\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2)-0\right]=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2)$$

$$\Rightarrow\int_a^b f_n(x)dx=\frac{\ln(1+n^2)}{2n}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}$$

$$\underset{\substack{\text{حالة عدم تعيين من الشكل } \frac{\infty}{\infty}\\ \text{فعليك بأوبيتال}}}{\overset{\text{ب}}{=}}\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2(1+n^2)}=0\ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=0 \quad \dots(1)$$

إن تابع النهاية للمتتالية المفروضة أي $f(x)=0$ هو تابع مستمر على $I=[0,1]$ وبالتالي فهو قابل للمكاملة على ذلك المجال ويكون:

$$\int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 0dx=0 \quad \dots(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)dx=\int_0^1 f(x)dx=0$$

أي أن العلاقة المذكورة في نص المبرهنة (2) محققة على الرغم من أن متتالية التوابع المفروضة ليست متقاربة بانتظام من التابع $f(x)=0$ على $I=[0,1]$.

مُبرهنة(3): لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ متتالية توابع معرفة على مجال مغلق مثل $I=[a,b]$ بحيث

$$-\infty<a<b<+\infty$$

ولنفرض أنها متقاربة نقطياً من تابع مثل $f(x)$ على $I=[a,b]$ ، وأن حدودها $f_n(x)$ عبارة عن توابع قابلة للاشتقاق على $I=[a,b]$ بالنسبة للمتحول x ، وأن المشتقات $f'_n(x)$ لحدودها عبارة عن توابع مستمرة على $I=[a,b]$ ، وبفرض أن متتالية المشتقات $\{f'_n(x)\}_{n\geq1}$ متقاربة بانتظام على $I=[a,b]$ من تابع مثل $g(x)$. عندئذٍ يكون التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق على $I=[a,b]$ ، ومشتقهُ هو $g(x)$ ، وتتحقق العلاقة:

$$\left(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\right)'=f'(x)=\lim_{n\to+\infty}f'_n(x)=g(x)$$

الإثبات: بما أن متتالية المشتقات $\{f'_n(x)\}_{n\geq1}$ متقاربة بانتظام على I من التابع $g(x)$ ، وأن حدودها $f'_n(x)$ عبارة عن توابع مستمرة على I بحيث $n\geq1$ فنستنتج "استناداً للمبرهنة(1)" أن تابع النهاية لها أي $g(x)$ مستمر على I.

بما أن التابع $g(x)$ مستمر على المجال المغلق $I=[a,b]$ فهو قابل للمكاملة عليه وبالتالي إذا فرضنا أن $G(x)$ هو التابع الأصلي لِـ $g(x)$ ، وأن $x_0\in I=[a,b]$ كيفي فإن:

$$\int_a^{x_0} g(x)dx=[G(x)]_a^{x_0}=G(x_0)-G(a) \quad \dots(1)$$

ولدينا:

$$\int_a^{x_0} g(x)dx \underbrace{=}_{\substack{\text{كون متتالية المشتقات } \{f_n'(x)\}_{n\geq 1} \\ \text{متقاربة بانتظام من } g(x) \text{ على } I \\ \text{بالتالي فهي متقاربة نقطياً من } g(x) \text{ على } I \\ \text{أي } \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)=g(x) \text{ وذلك لكُل } x\in I}} \int_a^{x_0} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\right) dx \underbrace{=}_{\substack{\text{كون متتالية المشتقات } \{f_n'(x)\}_{n\geq 1} \\ \text{متقاربة بانتظام من } g(x) \text{ على } I \\ \text{وأن حدودها توابع مستمرة على } I=[a,b] \\ \text{فنستطيع الاستفادة من} \\ \text{العلاقة الموجودة في المبرهنة } (2)}} \lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^{x_0} f_n'(x)dx\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} [f_n(x)]_a^{x_0} = \lim_{n\to+\infty} [f_n(x_0) - f_n(a)] = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) - \lim_{n\to+\infty} f_n(a) \underbrace{=}_{\substack{\text{كون المتتالية } \{f_n(x)\}_{n\geq 1} \\ \text{متقاربة نقطياً من } f(x) \text{ على } I \\ \text{فإن } \lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x) \text{ لكُل } x\in I \\ \text{ومنه } \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)=f(x_0)}} f(x_0) - f(a)$$

ومنهُ:

$$\int_a^{x_0} g(x)dx = f(x_0) - f(a) \quad \dots(2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$G(x_0) - G(a) = f(x_0) - f(a)$$

ومن الأخيرة نحصل على:

$$f(x_0) = G(x_0) - G(a) + f(a)$$

وبما أن x_0 كيفي من $I = [a,b]$ فإن

$$f(x) = G(x) - G(a) + f(a) \quad ; \quad \forall\, x \in I = [a,b]$$

إن التابع $f(x)$ هو عبارة عن مجموع لتوابع قابلة للاشتقاق على المجال $I = [a,b]$ مما يعني أن $f(x)$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجال $I = [a,b]$ ، ومشتقه هو:

$$f'(x) = G'(x) = g(x) \quad \dots(3)$$

بقي علينا التحقق من صحة العلاقة الموجودة في نص المبرهنة.

بما أن المتتالية $\{f_n'(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من التابع $g(x)$ على I فتكون متقاربة نقطياً من $g(x)$ على I أي:

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = g(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I}_{(4)}$$

وبما أن المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة نقطياً من التابع $f(x)$ فإن

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I$$

ومنهُ:

$$\underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I}_{(5)}$$

من (3) و (4) و (5) نحصل على:

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = f'(x) = g(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x) \;\; ; \;\; \forall\, x \in I$$

والعلاقة المذكورة في نص المبرهنة محققة. **وهو المطلوب**

انتهت المحاضرة السادسة