جامعة دمشـــق

كليـة العلــــوم

قسـم الرياضيـات

السنـــة الدراسيـة الثانية

اقرأ وارتقِ

مقرر التحليل 3

المحاضرة الرابعة

تاريخ المحاضرة: 21/10/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

تتمة في الخواص الأساسية للجداءات الغير منتهية

مُبرهنة: الشرط اللازم والكافي لكي يكون الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ أو $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ مساوياً للصفر هو أن تكون قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(a_n)$ أو $\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+b_n)$ مساوية لِـ $-\infty$.

- يتم ذلك بشكل خاص إذا كانت $b_n < 0$ والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ متباعدة.

الإثبات:

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} ln(1+b_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{k=n}(1+b_k)\right) = \ln(P_n)$$

$$S_n = \ln(P_n) \Rightarrow P_n = e^{S_n}$$

$$P = \lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = e^{\lim_{n\to+\infty} S_n} = e^S$$

فإذا كانت قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ هي $P=0$ فإن

$$e^S = 0 \Rightarrow S = -\infty$$

أي أن قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+b_n)$ هي $-\infty$.

وإذا كانت قيمة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} ln(1+b_n)$ هي $S=-\infty$ فإن

$$P = e^{-\infty} \Rightarrow P = 0$$

أي أن قيمة الجداء $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ هي الصفر.

مثال وظيفة: ادرس تقارب أو تباعد الجداء الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+7}{2n+5}$$

وأوجد قيمتهُ في حال تقاربهُ.

الحل: من الملاحظ أن

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{2n+7}{2n+5}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+7}{2n+5} = 1.1 = 1$$

مما يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض قد يكون متقارب وقد يكون متباعد ، ولدراسة تقاربهُ أو تباعدهُ نشكل الجداء الجزئي النوني له ونعلم أن:

$$P_n = \prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2k+1}{2k+3} \cdot \frac{2k+7}{2k+5}\right) = \prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2k+1}{2k+3}\right) \cdot \prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2k+7}{2k+5}\right) \Rightarrow$$

$$P_n=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdots\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\right)\cdot\left(\frac{9}{7}\cdot\frac{11}{9}\cdot\frac{13}{11}\cdots\frac{2n+5}{2n+3}\cdot\frac{2n+7}{2n+5}\right)\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}}$$

$$P_n=\left(\frac{3}{2n+3}\right)\cdot\left(\frac{2n+7}{7}\right)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2n+7}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{3}{7}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+7}{2n+3}\right)=\frac{3}{7}(1)=\frac{3}{7}\ \Rightarrow\ P=\frac{3}{7}$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\{P_n\}_{n\geq 1}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء الغير منتهي المفروض متقاربة من عدد حقيقي محدود وغير معدوم $P=\frac{3}{7}$ وهذا بدوره يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض متقارب والأكثر من ذلك قيمة ذلك الجداء هي $P=\frac{3}{7}$.

التقارب المطلق والتقارب الشرطي للجداءات الغير منتهية

تعريف:

- نقول عن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$ أنهُ متقارب بالإطلاق إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)$ متقاربة بالإطلاق.
- نقول عن الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$ أنهُ متقارب شرطياً إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(a_n)$ متقاربة شرطياً.

مُبرهنة: الشرط اللازم والكافي لكي يتقارب الجداء الغير منتهي $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)$ بالإطلاق هو أن تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ بالإطلاق. **"دون برهان وللتطبيق فقط"**

أمثـــلة

مثال(1): ادرس تقارب أو تباعد الجداء الغير منتهي الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^s}\right)\quad ;\quad s>0$$

الحل: إن الجداء الغير منتهي المفروض لهُ الشكل الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n)\quad ;\quad 1+b_n=1+\frac{1}{n^s}\Rightarrow b_n=\frac{1}{n^s}$$

لنأخذ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

وهي متسلسلة ريمان ونعلم أنها متقاربة عندما $s > 1$ ومتباعدة في حال $0 < s \leq 1$.

بالتالي "بحسب مبرهنة من المحاضرة السابقة" فإن الجداء المفروض متقارب عندما $s > 1$ ومتباعد عندما $0 < s \leq 1$.

مثال(2): أثبت أن الجداء الغير منتهي الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

متقارب شرطياً.

الحل: إن الجداء الغير منتهي المفروض لهُ الشكل الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + b_n) \quad ; \quad 1 + b_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

لنأخذ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

إن المتسلسلة السابقة متقاربة بحسب اختبار ليبنتز " راجع المحاضرة الثانية صـ5" ، وبالتالي الجداء الغير منتهي المفروض "بحسب مبرهنة من المحاضرة السابقة" متقارب. **لكن هل التقارب بالإطلاق أم شرطي؟**

لنأخذ متسلسلة القيم المطلقة من المتسلسلة السابقة أي لنأخذ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

إن متسلسلة القيم المطلقة هي المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة ، ومن هُنا نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ متقاربة شرطياً ومن ثم الجداء الغير منتهي المفروض متقارب شرطياً.

مثال(3): ادرس الجداء الغير منتهي الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

الحل: : إن الجداء الغير منتهي المفروض لهُ الشكل الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+b_n) \quad ; \quad 1+b_n = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

لنأخذ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

إن المتسلسلة السابقة متقاربة بحسب اختبار ليبنتز " تحقق من ذلك" ، وبالتالي الجداء الغير منتهي المفروض "بحسب مبرهنة من المحاضرة السابقة" متقارب. **لكن هل التقارب بالإطلاق أم شرطي؟**

لنأخذ متسلسلة القيم المطلقة من المتسلسلة السابقة أي لنأخذ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

إن متسلسلة القيم المطلقة هي المتسلسلة الريمانية فيها $p=\frac{1}{2}$ وهي متباعدة ، ومن هُنا نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ متقاربة شرطياً ومن ثم الجداء الغير منتهي المفروض متقارب شرطياً.

مثال(4)(وظيفة): ادرس الجداء

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots.$$

واحسب قيمته في حال تقاربه.

فكرة الحل: إن الجداء المفروض هو جداء غير منتهي ويكتب بدلالة الحد العام لهُ بالشكل

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

ببساطة يمكن التحقق من أن الجداء المفروض متقارب شرطياً ، ولإيجاد قيمتهُ شكل الجداء الجزئي النوني لهُ P_n ومن ثم وحد المقامات وأجري الاختصارات اللازمة وخذ النهاية لـِ P_n عندما n تسعى لـِ اللانهاية فتحصل على $P=1$.

مثال(5): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

الحل: إن المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة ذات حدود موجبة وحدها العام هو

$$a_n = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

لنأخذ المتسلسلة ذات الحدود الموجبة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \ln(e) = 1$$ عدد حقيقي موجب

بالتالي استناداً إلى اختبار نهاية النسبة (قاعدة المقارنة) فإن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n} \quad , \quad \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$ من نوع واحد

وبما أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}$ متباعدة فإن المتسلسلة المفروضة تكون متباعدة.

المتتاليـــات التابعيـــة

تعريف متتالية التوابع(الدوال): لتكن I مجموعة جزئية وغير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

بمقابلة كل عدد طبيعي مغاير للصفر n بتابع حقيقي $f_n(x)$ مُعرف على I نحصل على متتالية التوابع (أو الدوال) الحقيقية المعرفة على I بالشكل:

$$\underbrace{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots}_{*}$$

نسمي التابع $f_1(x)$ بالحد الأول للمتتالية التابعية * ، والتابع $f_2(x)$ بالحد الثاني لها و...و التابع $f_n(x)$ بالحد العام أو الحد النوني لمتتالية التوابع *.

نرمز اختصاراً لمتتالية التوابع * بدلالة الحد العام بالرمز:

$$\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$$

ملاحظة: إن المجموعة I في مقررنا سوف تكون مجالاً من $\mathbb{R}$ إلا إذا تم الإشارة لغير ذلك.

تعريف: نقول عن متتالية التوابع الحقيقية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ المعرفة على $I \subseteq \mathbb{R}$ إنها **متقاربة نقطياً**على I من تابع مثل $f(x)$ معرف على I **إذا وفقط إذا** كانت هذه المتتالية متقاربة كمتتالية عددية من أجل كُل قيمة للمتغير x من I. أي

المتتالية العددية الحقيقية $\{f_n(x_0)\}_{n\geq 1}$ متقاربة من $f(x_0)$ أياً كانت $x_0 \in I \iff$ $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة من $f(x)$ على I

مُلاحظة(1): إذا كان لدينا المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ المعرفة على $I \subseteq \mathbb{R}$ ، وكانت هذه المتتالية متقاربة من أجل كُل x_0 من I فيُمكن أن نُعرف تابعاً حقيقياً $f(x)$ على المجموعة I بالشكل:

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) \quad ; \quad \forall x_0 \in I$$

ونقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ أنها تتقارب نقطياً من التابع $f(x)$ على I ونكتب

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

- نسمي التابع $f(x)$ بتابع النهاية للمتتالية التابعية $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ على I أو بنهاية المتتالية التابعية.

مُلاحظة(2): يُمكن أن تتقارب متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ من أجل بعض النقاط من I وأن تتباعد من أجل البعض الآخر. فإذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل x_0 من I بحيث تكون من أجلها المتتالية العددية $\{f_n(x_0)\}_{n\geq1}$ متباعدة فنقول عندها أن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ المعرفة على I غير متقاربة (متباعدة)على I.

تعريف (تذكرة بتقارب متتالية عددية بلغة الـ ε): نقول عن المتتالية العددية الحقيقية $\{a_n\}_{n\geq1}$ إنها متقاربة من العدد الحقيقي a **إذا وفقط إذا** وجد لكُل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ ، عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon)$ بحيث يتحقق $|a_n - a| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم n المحققة للشرط $n \geq N_0(\varepsilon)$.

تعريف التقارب النقطي لمتتالية تابعية بلغة الـ ε: نقول عن متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ المعرفة على $I \subseteq \mathbb{R}$ إنها متقاربة نقطياً إلى التابع الحقيقي $f(x)$ على I **إذا وفقط إذا** وجد لكُل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ ، ولكُل نقطة $x = x_0$ من I ،عدد طبيعي $N_0 \neq 0$ بحيث يتحقق $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ من أجل جميع قيم n المحققة للشرط $n \geq N_0$ وبحيث $N_0 = N_0(\varepsilon, x_0)$ أي العدد الطبيعي N_0 يتعلق بالعدد ε المأخوذ وبقيمة x_0 المأخوذة من I. ونكتب عندئذٍ:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \quad ; \quad \forall x_0 \in I$$

أمثـــلة

مثال(1): لنأخذ متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ وبحيث $f_n(x) = x^n$ و $x \in I = [0,1]$.

إن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I = [0,1]$ من التابع:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & if \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & if \quad x = 1 \end{cases}$$

- لاحظ أن جميع حدود المتتالية هي

$$f_1(x) = x\ , f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \dots, f_n(x) = x^n, \dots$$

وهي عبارة عن توابع مستمرة على $I = [0,1]$ إلا أن تابع النهاية لتلك المتتالية أي $f(x)$ هو تابع غيرمستمر

على $I=[0,1]$ لأنهُ غير مستمر (منقطع) عند $x=1$.

مثال(2): لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ بحيث

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1} & if \quad |x|<1\\ 1 & if \quad |x|=1\\ \dfrac{n+1}{n} & if \quad |x|>1\end{cases}$$

وبحيث $x\in I=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

إن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على $\mathbb{R}$ من التابع:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=1$$

- إن جميع حدود المتتالية السابقة هي توابع غير مستمرة على $\mathbb{R}$ لأنها مثلاً غير مستمرة عند $x=1$ فمن الواضح أن:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f_n(x)=\frac{n+1}{n} \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f_n(x)=\frac{n}{n+1}$$

وأن:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f_n(x)\neq \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f_n(x) \quad ; \quad \forall\, n\geq 1$$

أي أن التابع $f_n(x)$ لا يملك نهاية عندما x تسعى للواحد ومن ثم فهو غير مستمر عند$x=1$ وذلك لكُل $n\geq 1$.

في حين أن تابع النهاية للمتتالية السابقة أي $f(x)=1$ هو تابع مستمر على $\mathbb{R}$.

مثال(3): لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ بحيث $f_n(x)=\frac{1}{e^{nx}}$ و $x\in I=[0,+\infty[$.

والمطلوب: إيجاد دالة النهاية وإيجاد جميع حدود المتتالية.

الحل:

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{nx}}=\lim_{n\to+\infty} e^{-nx}=\begin{cases}0 & if \quad x>0\\ 1 & if \quad x=0\end{cases}$$

أي أن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على $I=[0,+\infty[$ من التابع $f(x)$ السابق.

- إن جميع حدود المتتالية التابعية المأخوذة هي

$$f_1(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}, f_2(x)=\frac{1}{e^{2x}}=e^{-2x}, f_3(x)=\frac{1}{e^{3x}}=e^{-3x},\dots, f_n(x)=\frac{1}{e^{nx}}=e^{-nx},\dots$$

وهي عبارة عن توابع مستمرة على $I=[0,+\infty[$ ، أما تابع النهاية $f(x)$ فهو غير مستمر على المجال $I=[0,+\infty[$ لأنهُ غير مستمر (منقطع) عند $x=0$.

مثال(4): لتكن لدينا متتالية التوابع $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ بحيث $f_n(x) = \frac{x}{n}$ و $x \in I = [0, +\infty[$.

إن متتالية التوابع المفروضة متقاربة نقطياً على المجال $I = [0, +\infty[$ من التابع:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

- لاحظ أن جميع حدود المتتالية هي

$$f_1(x) = x \,, f_2(x) = \frac{x^2}{2}, f_3(x) = \frac{x^3}{3}, \dots, f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \dots$$

وهي عبارة عن توابع مستمرة على $I = [0, +\infty[$ ، وأن تابع النهاية لتلك المتتالية أي $f(x) = 0$ هو تابع مستمرأيضاً على $I = [0, +\infty[$.

نتيجة من التمارين السابقة: إن تابع النهاية لمتتالية تابعية ما $\{f_n(x)\}_{n\geq1}$ معرفة على $I \subseteq \mathbb{R}$ قد لا يتمتع بالخواص أو الصفات ذاتها التي تتمتع بها حدود هذه المتتالية. ففي المثالين الأول والثالث كانت حدود المتتالية مستمرة في حين أن تابع النهاية لها كان تابعاً غير مستمراً ، أما المثال الثاني فكانت حدود المتتالية غيرمستمرة في حين أن تابع النهاية لها كان مستمراً، وفي المثال الرابع كانت حدود المتتالية مستمرة وتابع النهاية لها كان مستمراً.

تذكر أن: التابع الحقيقي $f(x)$ مستمر عند $x = x_0$ من مجموعة تعريفهُ إذا وفقط إذا تحقق

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

انتهت المحاضرة الرابعة