جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات
السنة الدراسية الثانية

مقرر التحليل 3

المحاضرة الثانية

تاريخ المحاضرة: 13/10/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+n}{2+n^3}$$

الحل: إن المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة ذات حدود موجبة وضوحاً وحدها العام هو

$$a_n = \frac{3+n}{2+n^3}$$

لنأخذ المتسلسلة ذات الحدود الموجبة الآتية:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3+n}{2+n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(3+n)}{2+n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n^3}{2+n^3} = 1 \quad \text{عدد حقيقي موجب}$$

بالتالي استناداً إلى اختبار نهاية النسبة (قاعدة المقارنة) فإن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+n}{2+n^3} \; , \; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{من نوع واحد}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+n}{2+n^3} \; \text{متقاربة} \Leftarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \; \text{ريمانية} \; p = 2 \; \text{فهي متقاربة}$$

تعريف: نقول عن التكامل

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad ; \quad a \; \text{عدد حقيقي}$$

أنهُ متقارب إذا كان:

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\int_a^b f(x)dx \right] = A \quad ; \quad A \; \text{عدد حقيقي موجود ومحدود}$$

وعندها تكون قيمة التكامل المدروس هي:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\int_a^b f(x)dx \right] = A$$

وإذا لم تكن النهاية السابقة موجودة قُلنا عن التكامل المدروس أنهُ متباعد.

6− **معيار أو اختبار كوشي التكاملي**: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة عددية ذات حدود غير سالبة وبفرض أنهُ يوجد تابع $f = f(x)$ موجب ومستمر ومتناقص من أجل كُل $x \geq 1$ وبحيث يكون:

$$f(n) = a_n \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$$

عندئذٍ:

1− الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متقاربة هو أن يكون التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متقارب أي أن:

$$\text{متقاربة } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Leftrightarrow \text{ متقارب } \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

2− الشرط اللازم والكافي لكي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متباعدة هو أن يكون التكامل $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ متباعد أي أن:

$$\text{متباعدة } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Leftrightarrow \text{ متباعد } \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

- يمكن في المعيار السابق أن نأخذ $f(n) = a_n$ ابتداءً من حد معين $n \geq N > 1$ وعندها يصبح التكامل

$$\int_N^{+\infty} f(x)dx$$

مثال: ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

الحل: إن المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة ذات حدود موجبة (بالتالي الحدود غير سالبة) وحدها العام هو

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

لنأخذ التابع:

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} \quad ; \quad x \geq 2$$

إن التابع الذي قمنا بأخذه يحقق الصفات الآتية:

- هو تابع موجب من أجل كُل $x \geq 2$ لأنهُ كسري بسطهُ ومقامهُ موجبان.
- هو تابع مستمر من أجل كُل $x \geq 2$ لأنهُ كسري بسطهُ مستمر ومقامهُ مستمر.
- من السهل إثبات أنهُ تابع متناقص من أجل كُل $x \geq 2$.

لنحسب التكامل

$$I = \int_{2}^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$$

ومن أجل ذلك نجري تغيير في المتحول x من الشكل:

$$t = \ln(x) \;\Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$$

كون التكامل محدد فهذا التغيير في المتحول يرافقه تغيير في حدود التكامل ومن هُنا نجد أن:

$$x_1 \underbrace{=}_{\text{الحد الأدنى للتكامل القديم}} 2 \Rightarrow t_1 \underbrace{=}_{\text{الحد الأدنى للتكامل الجديد}} \ln(x_1) = \ln(2)$$

$$x_2 \underbrace{=}_{\text{الحد الأعلى للتكامل القديم}} b \Rightarrow t_2 \underbrace{=}_{\text{الحد الأعلى للتكامل الجديد}} \ln(x_2) = \ln(b)$$

وبالتالي:

$$I = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} = -\frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln(2)}$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left[\int_{2}^{b} f(x)dx\right] = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln(2)}\right] = \frac{1}{\ln(2)}$$

وهذا يعني أن التكامل $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ متقارب وبالتالي "استناداً لاختبار كوشي التكاملي" فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة.

السلاسل المتناوبة

تعريف: نقول عن سلسلة عددية غير منتهية بأنها سلسلة متناوبة إذا كانت إشارات حدودها المتتالية متناوبة بين موجب وسالب. فإذا كانت إشارة الحد الأول موجبة فتكون المتسلسلة من الشكل

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

أما إذا كانت إشارة الحد الأول سالبة فتكون من الشكل

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

معيار أو اختبار ليبنتز لتقارب أو تباعد السلاسل المتناوبة: تكون المتسلسلة المتناوبة

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

متقاربة إذا حققت الشرطين الآتيين:

1) $|a_{n+1}| \leq |a_n| \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1$ " أي أن القيمة المطلقة لحدودها تشكل متتالية متناقصة "

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة حدودها ذات إشارات مختلفة (بحالة خاصة متناوبة) عندئذٍ نقول عن هذه المتسلسلة أنها تتقارب مطلقاً (متقاربة بالإطلاق) إذا تقاربت متسلسلة القيم المطلقة لحدودها أي إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \quad \text{متقاربة}$$

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة حدودها ذات إشارات مختلفة (بحالة خاصة متناوبة) عندئذٍ نقول عن هذه المتسلسلة أنها متقاربة شرطياً إذا كانت متقاربة وكانت متسلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة أي إذا كانت

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \quad \text{متباعدة}$$

مُبرهنة (تقبل دون برهان): لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ متسلسلة كيفية أي حدودها ذات إشارات مختلفة (بحالة خاصة متناوبة) عندئذٍ إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة مطلقاً فإنها تكون متقاربة أي:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| \;\text{متقاربة}\; \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \;\text{متقاربة}$$

مثال(1): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

الحل: إن المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة من الشكل

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n \quad ; \quad a_n = \frac{1}{n}$$

أي هي متسلسلة متناوبة ولدينا:

$$n = n \;;\; \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow n+1 > n \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1 \;\;\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1$$

الشرط الأول من شروط ليبنتز مُحقق.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

الشرط الثاني من شروط ليبنتز مُحقق.

نستنتج أن المتسلسلة المفروضة متقاربة. لكن **هل هي متقاربة شرطياً أم مطلقاً؟**

من أجل ذلك نشكل متسلسلة القيم المطلقة لحدودها أي المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

إن متسلسلة القيم المطلقة لحدود المتسلسلة المفروضة هي المتسلسلة التوافقية ونعلم سابقاً أنها متباعدة.

بالتالي كون المتسلسلة المفروضة متقاربة ، ومتسلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة فحسب "التعريف السابق"

نستنتج أن المتسلسلة المفروضة متقاربة شرطياً.

مثال(2): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

الحل: إن المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة من الشكل

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad ; \quad a_n = \frac{1}{n^2}$$

أي هي متسلسلة متناوبة ولدينا:

$$n = n \;;\; \forall\, n \geq 1 \;\Rightarrow n+1 > n \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1 \;\;\Rightarrow (n+1)^2 > n^2 \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{(n+1)^2}\right| < \left|\frac{1}{n^2}\right| \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1$$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| < |a_n| \;\;;\;\; \forall\, n \geq 1$$

الشرط الأول من شروط ليبنتز مُحقق.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

الشرط الثاني من شروط ليبنتز مُحقق.

نستنتج أن المتسلسلة المفروضة متقاربة. لكن **هل التقارب شرطي أم مطلق؟**

من أجل ذلك نشكل متسلسلة القيم المطلقة لحدودها أي المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

إن متسلسلة القيم المطلقة لحدود المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة ريمان بحيث $p = 2$ ونعلم سابقاً أنها متقاربة ومن هنا نستنتج أن المتسلسلة المفروضة متقاربة بالإطلاق.

مثال(3): ادرس تقارب أو تباعد المتسلسلة الآتية

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n.\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

الحل: إن المتسلسلة المفروضة متسلسلة متناوبة ويمكننا بطريقة أو بأُخرى إثبات أن

$$|a_{n+1}| < |a_n| \ ; \ \forall\, n \geq 2$$

أي أن الشرط الأول من شروط ليبنتز مُحقق.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sin(0) = 0$$

الشرط الثاني من شروط ليبنتز مُحقق.

نستنتج أن المتسلسلة المفروضة متقاربة. لكن **هل التقارب شرطي أم مطلق؟**

من أجل ذلك نشكل متسلسلة القيم المطلقة لحدودها أي المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n.\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

لنأخذ المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{n}$$

والأخيرة متباعدة لأنها من طبيعة المتسلسلة التوافقية كما أن:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}=1\neq 0$$

وبحسب اختبار نهاية النسبة نستنتج أن المتسلسلتين

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{n}\ ,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\quad \text{من طبيعية واحدة}$$

أي أن $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ متسلسلة القيم المطلقة لحدود المتسلسلة المفروضة هي متسلسلة متباعدة.

بالتالي كون المتسلسلة المفروضة متقاربة ، ومتسلسلة القيم المطلقة لحدودها متباعدة نستنتج أن المتسلسلة المفروضة متقاربة شرطياً.

الجداءات غير المنتهية (اللانهائية)

تعريف: لتكن لدينا المتتالية العددية $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ والتي حدودها

$$a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,\dots$$

ولنربط بين حدود هذه المتتالية بعملية الضرب فنحصل على المقدار:

$$a_1.a_2.a_3\dots a_n\dots$$

نسمي المقدار السابق جداء غير منتهٍ (جداءً لا نهائياً) ، كما ونسمي a_1 بالحد الأول للجداء و a_2 الحد الثاني للجداء و a_n الحد العام للجداء.

نرمز للجداء السابق بالرمز المختصر $\prod_{n=1}^{+\infty}a_n$ أي أن:

$$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n=a_1.a_2.a_3\dots a_n\dots$$

تعريف: ليكن لدينا الجداء غير المنتهي الآتي

$$\prod_{n=1}^{+\infty}a_n=a_1.a_2.a_3\dots a_n\dots$$

عندئذٍ نسمي جداء الحدود الـ n الأولى بالجداء الجزئي النوني للجداء الغير منتهي المفروض ونرمز لهُ بالرمز P_n أي أن:

$$P_n=a_1.a_2\dots a_n=\prod_{k=1}^{k=n}a_k$$

نسمي المتتالية $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ بمتتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء الغير منتهي المفروض ومن الواضح أن حدود هذه المتتالية هي:

$$P_1 = a_1 \,, P_2 = a_1 . a_2 \,, P_3 = a_1 . a_2 . a_3 \,, \dots , P_n = a_1 . a_2 . a_3 \dots a_n$$

تعريف: نقول عن الجداء الغير منتهي

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 . a_2 . a_3 \dots a_n \dots$$

أنهُ متقارب إذا كانت $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية لهُ متقاربة إلى عدد حقيقي محدود وغير معدوم P. أي إذا كان

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = P \quad ; \quad 0 \neq P \in \mathbb{R} \;\; , \;\; P \neq \pm\infty$$

فإن الجداء الغير منتهي المدروس متقارب.

وفي هذه الحالة نسمي P قيمة الجداء الغير منتهي المدروس ونكتب:

$$P = \prod_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 . a_2 . a_3 \dots a_n \dots$$

أما إذا انتهى P_n إلى الصفر أو اللانهاية أو إذا لم يملك نهاية عندما تنتهي n إلى اللانهاية فإننا نقول عن الجداء الغير منتهي المدروس أنهُ متباعد. أي إذا كان

$\lim_{n\to+\infty} P_n$ غير موجودة أو $\lim_{n\to+\infty} P_n = \pm\infty$ أو $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$

فإن الجداء الغير منتهي المدروس متباعد.

مثال: ادرس تقارب أو تباعد الجداء التالي

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

وأوجد قيمتهُ في حال تقاربه.

الحل: لدراسة تقارب أو تباعد الجداء الغير منتهي المفروض نشكل الجداء الجزئي النوني له ونعلم أن:

$$P_n = \prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k+1)}{k.k} = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k}.\frac{k+1}{k}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\quad\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}}$$

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow P=\frac{1}{2}$$

من الأخيرة يتبين لنا أن $\{P_n\}_{n\geq 2}$ متتالية الجداءات الجزئية المنتهية للجداء الغير منتهي المفروض متقاربة من العدد المحدود وغير المعدوم $P=\frac{1}{2}$ وهذا بدوره يعني أن الجداء الغير منتهي المفروض متقارب والأكثر من ذلك قيمة ذلك الجداء هي $P=\frac{1}{2}$.

انتهت المحاضرة الثانية