جامعة دمشـــق

كليـة العلـــوم

قسم الرياضيات

السنـــة الدراسيـة الثانية

اقرأ وارتقِ

المعادلات التفاضلية (1)

المحاضرة الثانية

تاريخ المحاضرة: 7/10/2015

مدرس المقرر: د. خليل يحيى

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى

أولاً: المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق

الفقرة الأولى: المعادلات التفاضلية ذات المتحولات المنفصلة وطريقة إيجاد الحل العام لها.

- نعلم أن الشكل العام للمعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى هو

$$F(x,y,y')=0$$

وبحيث $y=y(x)$ ، F دالة مستمرة بالنسبة لـِ x,y,y'.

نقول عن المعادلة التفاضلية السابقة أنها محلولة بالنسبة للمشتق إذا استطعنا كتابتها بالشكل

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ \dots *\quad \text{أو بالشكل} \quad y'=f(x,y)$$

بحيث f دالة مستمرة ومحدودة بالنسبة لـِ x,y.

لنميز عدة حالات على المعادلة $*$:

1– إذا كانت f تابعة لـِ x فقط (أي لا تحوي y) فتصبح * بالشكل:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بفصل (عزل) المتحولات وذلك بأخذ جداء الطرفين بالوسطين}}\ dy=f(x)dx\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}}\ \int dy=\int f(x)dx+C\ \Rightarrow$$

$$y=\int f(x)dx+C\quad ;\quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية * في هذه الحالة.

2– إذا كانت f تابعة لـِ y فقط (أي لا تحوي x) فتصبح * بالشكل:

$$\frac{dy}{dx}=f(y)\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بفصل (عزل) المتحولات وذلك بأخذ جداء الطرفين بالوسطين ثم القسمة على } f(y)\neq 0}\ \frac{dy}{f(y)}=dx\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}}\ \int\frac{dy}{f(y)}+C=\int dx\ \Rightarrow$$

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C\quad ;\quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية * في هذه الحالة.

مُلاحظة: كون قسمنا على $f(y)$ فيفضل أن نفرض أن $f(y)\neq 0$.

3– إذا كانت الدالة f عبارة عن جداء دالتين الأولى تابعة في x والثانية تابعة في y أي

$$f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$$

فتصبح * بالشكل:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x).f_2(y)\ \underset{\substack{\text{بفصل (عزل)}\\ \text{المتحولات وذلك بأخذ جداء}\\ \text{الطرفين بالوسطين}\\ \text{ثم القسمة على } f_2(y)\neq 0}}{\Rightarrow}\ \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx\ \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow}\ \int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$$

بإجراء عملية المكاملة نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية * في هذه الحالة.

مُلاحظة: كون قسمنا على $f_2(y)$ فيفضل أن نفرض أن $f_2(y)\neq 0$.

- **بشكلٍ عام** إن المعادلات التفاضلية القابلة لفصل المتحولات تأخذ الصيغة الآتية:

$$f_1(x).g_1(y)dx+f_2(x).g_2(y)dy=0\quad \dots **$$

بحيث f_1,f_2 دالتين مستمرتين بالنسبة لِـ x و g_1,g_2 دالتين مستمرتين بالنسبة لِـ y.

نقسم طرفي المعادلة السابقة على المقدار $g_1(y).f_2(x)$ ونفرض أن هذا المقدار غير معدوم كي نستطيع التقسيم عليه ومنهُ نجد أن المعادلة ** تصبح بالشكل:

$$\frac{f_1(x).g_1(y)}{g_1(y).f_2(x)}dx+\frac{f_2(x).g_2(y)}{g_1(y).f_2(x)}dy=0\ \underset{\text{بالاختصار}}{\Rightarrow}\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0\ \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow}$$

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C\quad;\quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية ** ، وكل مرة نعطي فيها الثابت C قيمة نحصل على حل خاص جديد للمعادلة أي نحصل على منحني جديد ممثل بالدالة y.

أمثلة على الفقرة الأولى

مثال(1): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}\ \underset{\substack{\text{بفصل (عزل)}\\ \text{المتحولات}}}{\Rightarrow}\ \frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}\ \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow}\ \int\frac{dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{1+x^2}$$

تذكر أن:

$arc\tan(a) + arc\tan(b) = arc\tan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

$$\Rightarrow arc\tan(y) = arc\tan(x) + arc\tan(C)$$

$$\Rightarrow arc\tan(y) = arc\tan\left(\frac{x+C}{1-Cx}\right) \Rightarrow y = \frac{x+C}{1-Cx} \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

مُلاحظة: إذا تبين لدينا بعد المكاملة أن أغلب الحدود فيها $arc\ tan$ فنضع $arc\ tan(C)$ في عبارة الحل العام ونقول C ثابت اختياري وهذه العملية تُحسن عبارة الحل العام وقد تحولها من شكل ضمني إلى شكل ظاهري.

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{y^2-4y}{x}$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-4y}{x} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات}\\ \text{وذلك بأخذ جداء الطرفين بالوسطين}\\ \text{ثم القسمة على } x(y^2-4y)\neq 0}} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y^2-4y} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int\frac{dx}{x} = \underbrace{\int\frac{dy}{y(y-4)}}_{I} \ldots(1)$$

لنحسب التكامل:

$$I = \int\frac{dy}{y(y-4)}$$

ومن أجل ذلك نفرق الكسر:

$$\frac{1}{y(y-4)} = -\frac{1}{4}.\frac{1}{y} + \frac{1}{4}.\frac{1}{y-4}$$

ومنهُ:

$$I = -\frac{1}{4}\int\frac{dy}{y} + \frac{1}{4}\int\frac{dy}{y-4} = -\frac{1}{4}ln|y| + \frac{1}{4}ln|y-4| = -\frac{1}{4}[ln|y| - ln|y-4|]$$

كما ونعلم أن:

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x|$$

نعوض ما سبق في (1) فنحصل على:

$$\ln|x| = -\frac{1}{4}[ln|y| - ln|y-4|] + \ln|C| \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

مُلاحظة: إذا تبين لدينا بعد المكاملة أن أغلب الحدود فيها ln فنضع $\ln|C|$ في عبارة الحل العام ونقول C ثابت اختياري وهذه العملية تُحسن عبارة الحل العام وقد تحولها من شكل ضمني إلى شكل ظاهري.

مثال(3): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{-x}{y+1}$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y+1} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل (عزل)} \\ \text{المتحولات وذلك بأخذ جداء الطرفين} \\ \text{بالوسطين}}} \quad -xdx = (y+1)dy \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} -\int xdx = \int (y+1)dy$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + y + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} + y + \frac{x^2}{2} + C = 0 \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

مثال(4): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xy' + y = 0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$x.\frac{dy}{dx} = -y \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات} \\ \text{وذلك بأخذ جداء الطرفين بالوسطين} \\ x.y\neq 0 \text{ ثم القسمة على}}} \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x} \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

مثال(5): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$x(1+y^2)dx = -y(1+x^2)dy \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات} \\ \text{وذلك بالقسمة على } (1+x^2)(1+y^2)\neq 0}} \frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{y}{1+y^2}dy$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int \frac{x}{1+x^2}dx = -\int \frac{y}{1+y^2}dy \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln|C| \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2)] = \ln|C| \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

مثال(6) (وظيفة): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$2x\sqrt{y}dx + (1-x^2)dy = 0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$2x\sqrt{y}dx = (x^2-1)dy \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات} \\ \text{وذلك بالقسمة على } (x^2-1)\sqrt{y}\neq 0}} \frac{2dy}{2\sqrt{y}} = \frac{2x}{x^2-1}dx \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}}$$

$$2\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \frac{2x}{x^2-1}dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = \ln|x^2-1| + \ln|C| \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

مثال(7) (وظيفة): أوجد الحل الخاص المار بالنقطة $M\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ للمعادلة التفاضلية

$$2x\sin(y)\,dx + (x^2+3)\cos(y)\,dy = 0$$

صيغة أُخرى أصح للسؤال: أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y(1)=\frac{\pi}{2}$ للمعادلة التفاضلية السابقة.

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x وتكتب بالشكل الآتي:

$$2x\sin(y)\,dx = -(x^2+3)\cos(y)\,dy \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات}\\ \text{وذلك القسمة على}\\ -(x^2+3).\sin(y)\neq 0}} \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy = -\frac{2x}{x^2+3}dx \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}}$$

$$\int\frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy = -\int\frac{2x}{x^2+3}dx \Rightarrow \ln|sin\,y| = -\ln|x^2+3| + \ln|C|$$

$$\Rightarrow \ln|sin\,y| = \ln\left|\frac{C}{x^2+3}\right| \Rightarrow sin\,y = \frac{C}{x^2+3} \Rightarrow$$

$$y = arc\sin\left(\frac{C}{x^2+3}\right) \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة المفروضة.

- المطلوب هو إيجاد الحل الخاص الذي يحقق $y(1)=\frac{\pi}{2}$ وبالتالي نعوض في عبارة الحل العام عن كُل x بـِ $x=1$ وعن كُل y بـِ $y=\frac{\pi}{2}$ فنجد أن:

$$\frac{\pi}{2} = arc\sin\left(\frac{C}{4}\right) \Rightarrow \frac{C}{4} = 1 \Rightarrow C = 4$$

وبالتالي فإن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية والمحقق للشرط المفروض هو

$$y = arc\sin\left(\frac{4}{x^2+3}\right)$$

الفقرة الثانية: المعادلات التفاضلية التي ترد (تتحول) إلى منفصلة المتحولات.

يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي ليست بقابلة لفصل المتحولات ولكنها ترد إلى معادلات تفاضلية قابلة لفصل المتحولات.

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$\underbrace{\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)}_{(1)} \quad ; \quad a,b,c \text{ ثوابت}$$

إن المعادلة التفاضلية السابقة ليست قابلة لفصل المتحولات ولكنها تُرد إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات وذلك إذا أجرينا تغيير في التابع y من الشكل:

$$z = ax+by+c \quad ; \quad z = z(x)$$

نفاضل المساواة الأخيرة بالنسبة للمتحول x فنحصل على:

$$dz = adx + bdy \underbrace{\Rightarrow}_{dx \text{ نقسم على }} \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بالاستفادة من المعادلة التفاضلية المدروسة} \\ \text{ومن التحويل}}} \underbrace{\frac{dz}{dx} = a + bf(z)}_{(2)}$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو z أما المتحول فهو x وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$dx = \frac{dz}{a + bf(z)} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (2) ، وإذا عدنا للتابع القديم y نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة (1).

أمثلة على الفقرة الثانية

مثال(1): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = x + y + 1$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ، التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad ; \quad f(ax + by + c) = x + y + 1$$

لإيجاد الحل العام لها نجري تغييراً في التابع y من الشكل

$$z = x + y + 1 \quad ; \quad z = z(x)$$

نفاضل المساواة الأخيرة بالنسبة للمتحول x فنحصل على:

$$dz = dx + dy \underbrace{\Rightarrow}_{dx \text{ نقسم على }} \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بالاستفادة من المعادلة التفاضلية المفروضة} \\ \text{ومن التحويل}}} \underbrace{\frac{dz}{dx} = 1 + z}_{*}$$

والمعادلة * هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو z أما المتحول فهو x وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات} \\ \text{وذلك بأخذ جداء الطرفين بالوسطين ثم القسمة على} \\ (1+z) \neq 0}} dx = \frac{dz}{1 + z} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} x = \ln|1 + z| + \ln|C| \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية * ، وبالعودة للتابع القديم أي بتعويض $z = x + y + 1$

فيما سبق نحصل على:

$$x = \ln|x+y+2| + \ln|C| \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

مثال(2) (وظيفة): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y-1}$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ، التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) \quad ; \quad f(ax+by+c) = \frac{1}{x+y-1}$$

لإيجاد الحل العام لها نجري تغييراً في التابع y من الشكل

$$z = x+y-1 \quad ; \quad z = z(x)$$

نفاضل المساواة الأخيرة بالنسبة للمتحول x فنحصل على:

$$dz = dx + dy \quad \underbrace{\Rightarrow}_{dx \text{ نقسم على}} \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بالاستفادة من المعادلة التفاضلية المفروضة} \\ \text{ومن التحويل}}} \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dz}{dx} = \frac{z+1}{z}}_{*}$$

والمعادلة * هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو z أما المتحول فهو x وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بفصل المتحولات} \\ \text{وذلك بأخذ جداء الطرفين بالوسطين ثم القسمة على} \\ (1+z) \neq 0}} \quad dx = \frac{z}{1+z}dz \quad \Rightarrow dx = dz - \frac{1}{1+z}dz \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}}$$

$$x = z - \ln|z+1| + C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية * ، وبالعودة للتابع القديم أي بتعويض $z = x+y-1$

فيما سبق نحصل على:

$$x = x+y-1 - \ln|x+y-1+1| + C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري} \quad \Rightarrow$$

$$y - \ln|x+y| - 1 = C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

انتهت المحاضرة الثانية

الفصل الثاني – أولاً – يوجد عدة فقرات فعليك التركيز في كُل فقرة ولا تلجأ للحفظ أبداً بل دعم كل فقرة

بأمثلة كثيرة كي تستطيع في الامتحان التذكر على أي فقرة سوف تستند في الحل

في الامتحان غالباً يأتي من كُل فقرة معادلة تفاضلية ويطلب إيجاد الحل العام أو الخاص لها