WWW.facebook.com/primavira33

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

البنى الجبرية (1)

المحاضرة الأولى

تاريخ المحاضرة: 12/10/2015

مدرس المقرر: د. حمزة الحاكمي

مكتبة بريما فيرا – مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

المرجع: كتاب البنى الجبرية1 للدكتور حمزة الحاكمي.

المحاضرات: كافية ووافية لتحصيل فهم المقرر والقدرة على حل أي تمرين وقد يأتي في الامتحان أسئلة من التمارين الموجودة في الكتاب حتى وإن لم يتم ذكرها في المحاضرة.

ندرس في هذا المقرر " نظرية الزمر" وسنبدأ بـ:

مدخــل في نظــرية المجموعـــات

العلاقـــات

تعريف: لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين $(A, B \neq \phi)$ عندئذٍ نعرف المجموعة $A \times B$ بأنها مجموعة كُل الأزواج المرتبة (a, b) التي مركبتها الأولى $a \in A$ ومركبتها الثانية $b \in B$ أي أن:

$$A \times B = \{ (a, b) \quad : \quad a \in A \ , \ b \in B\}$$

نسمي $A \times B$ بمجموعة الجداء الديكارتي للمجموعة A بالمجموعة B.

تعريف: لتكن A, B مجموعتين غير خاليتين $(A, B \neq \phi)$ ، $A \times B$ مجموعة الجداء الديكارتي للمجموعة A بالمجموعة B عندئذٍ نسمي كُل مجموعة جزئية ρ من الجداء الديكارتي $A \times B$ علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B أي أن:

$$\rho \text{ علاقة من المجموعة } A \text{ إلى المجموعة } B \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{تعريفاً}} \rho \subseteq A \times B$$

مثال: لتكن

$$A = \{1,2\} \ , \ B = \{a, b, c\}$$

عندئذٍ:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

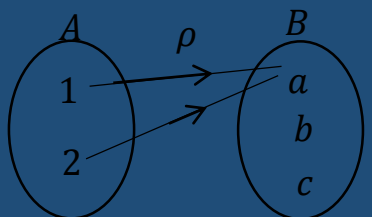
إن المجموعة

$$\rho = \{(1, a), (2, a)\}$$

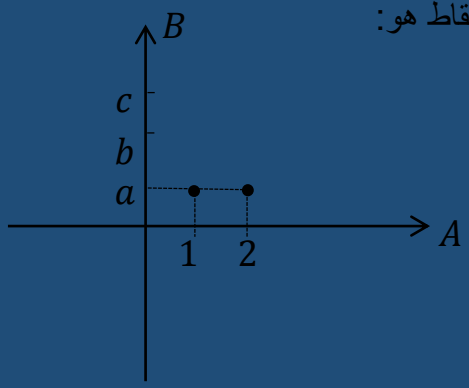
جزئية من الجداء الديكارتي $A \times B$ بالتالي فإن ρ تشكل علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B.

- إن العلاقة ρ السابقة يمكن التعبير عنها بأشياء كثيرة (لغوياً - تمثيل بياني).

إن تمثيل العلاقة ρ باستخدام المخططات هو:



إن تمثيل العلاقة ρ باستخدام النقاط هو:



تعريف: لتكن P مجموعة ما غير خالية $(P \neq \phi)$ عندئذٍ نسمي كُل مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $P \times P$ بعلاقة ثنائية على P ونرمز عادةً لهذه العلاقة الثنائية بالرمز ρ.

- إذا كانت ρ علاقة ثنائية على المجموعة P وكان $(a,b) \in \rho$ فعندئذٍ نقول أن العنصر b يرتبط بالعنصر a وفق العلاقة ρ ونعبر عن ذلك بالكتابة $a\ \rho\ b$. أي أنهُ من أجل أي عنصرين $a,b \in P$ فإن

$$(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a\ \rho\ b$$

تعريف: لتكن P مجموعة ما غير خالية $(P \neq \phi)$ ولتكن ρ علاقة ثنائية معرفة على P عندئذٍ

1– نقول عن العلاقة ρ أنها انعكاسية إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall\ a \in P \quad \Rightarrow \quad (a,a) \in \rho$$

وهذا يعني أنهُ من أجل أي عنصر $a \in P$ فإن a يرتبط بنفسه وفق العلاقة ρ أو بالعلاقة ρ أي $a\ \rho\ a$.

2– نقول عن العلاقة ρ أنها تناظرية إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall\ a,b \in P \ ; \ (a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$$

وهذا يعني أنهُ من أجل أي عنصرين $a,b \in P$ بحيث أن $a\ \rho\ b$ فإن $b\ \rho\ a$.

3– نقول عن العلاقة ρ أنها تخالفية إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall\ a,b \in P \ ; \ \left.\begin{matrix}(a,b) \in \rho \\ (b,a) \in \rho\end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$$

وهذا يعني أنهُ من أجل أي عنصرين $a,b \in P$ بحيث أن $a\ \rho\ b$ و $b\ \rho\ a$ فإن هذين العنصرين متساويين أي $a = b$.

ونعبر عن ذلك بالشكل الرياضي الآتي:

$$\forall\ a,b \in P \ ; \ a\ \rho\ b \underset{\text{و}}{\wedge} b\ \rho\ a \Rightarrow a = b$$

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$

4– نقول عن العلاقة ρ أنها متعدية إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall\, a,b,c \in P \;\; ; \;\; \left.\begin{matrix}(a,b)\in\rho\\(b,c)\in\rho\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a,c)\in\rho$$

وهذا يعني أنهُ آياً كانت $a,b,c \in P$ بحيث أن $a\ \rho\ b$ و $b\ \rho\ c$ فإن $a\ \rho\ c$.

والسطر الأخير نعبر عنهُ بالشكل الرياضي الآتي:

$$\forall\, a,b,c \in P \;\; ; \;\; a\ \rho\ b \wedge b\ \rho\ c \Rightarrow a\ \rho\ c$$

علاقـــات التكافؤ

تعريف: لتكن P مجموعة ما غير خالية $(P \neq \phi)$ ولتكن ρ علاقة ثنائية معرفة على P عندئذٍ نقول عن ρ أنها علاقة تكافؤ على P إذا كانت ρ علاقة انعكاسية و تناظرية و متعدية.

مثال(1): لتكن المجموعة

$$P = \{1,2,3,4,5\}$$

ولنأخذ العلاقة ρ المعرفة على المجموعة P بالشكل:

$$\rho = \{(1,2),(2,1),(3,1)\} \subseteq P \times P$$

1– العلاقة ρ ليست انعكاسية لأن $1 \in P$ لكن $(1,1) \notin \rho$.

2– العلاقة ρ ليست تناظرية لأن $(3,1) \in \rho$ لكن $(1,3) \notin \rho$.

3– العلاقة ρ ليست تخالفية لأن $(1,2) \in \rho$ و $(2,1) \in \rho$ و $1 \neq 2$.

4– العلاقة ρ ليست متعدية لأن $(3,1) \in \rho$ و $(1,2) \in \rho$ لكن $(3,2) \notin \rho$.

نستنتج مما سبق أن ρ ليست علاقة تكافؤ على P.

مثال(2): لتكن المجموعة P نفسها الواردة في المثال السابق ولنأخذ العلاقة ρ_1 المعرفة على المجموعة P بالشكل:

$$\rho_1 = \{(1,2),(3,1)\} \subseteq P \times P$$

1– العلاقة ρ_1 ليست انعكاسية لأن $1 \in P$ لكن $(1,1) \notin \rho_1$.

2– العلاقة ρ_1 ليست تناظرية لأن $(1,2) \in \rho_1$ لكن $(2,1) \notin \rho_1$.

3– العلاقة ρ_1 تخالفية لأنها تُحقق الشرط.

4– العلاقة ρ_1 ليست متعدية لأن $(3,1) \in \rho_1$ و $(1,2) \in \rho_1$ لكن $(3,2) \notin \rho_1$.

نستنتج مما سبق أن ρ_1 ليست علاقة تكافؤ على P.

مثال(3): لتكن المجموعة P نفسها الواردة في المثال السابق ولنأخذ العلاقة ρ_2 المعرفة على المجموعة P بالشكل:

$$\rho_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\} \subseteq P \times P$$

العلاقة ρ_2 انعكاسية وتناظرية وتخالفية ومتعدية لأنها تحقق الشروط وينتج أنها علاقة تكافؤ على P.

تعريف: لتكن P مجموعة ما غير خالية $(P \neq \phi)$ ، ولتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P ، وليكن a عنصراً ما من عناصر المجموعة P $(a \in P)$ عندئذٍ نسمي المجموعة:

$$\overline{a} = \{x \ : \quad x \in P \quad and \quad a \, \rho \, x\}$$

بصف تكافؤ العنصر a أو بصف التكافؤ المولد بالعنصر a.

- إن $\overline{a}$ صف تكافؤ العنصر a هو مجموعة جزئية من P $(\overline{a} \subseteq P)$وهو دوماً غير خالي$(\overline{a} \neq \phi)$ لأنهُ على الأقل يحوي a أي $a \in \overline{a}$ وذلك من أجل كُل $a \in P$.

- نسمي العنصر a بممثل $\overline{a}$ وذلك من أجل كل $a \in P$.

- نرمز لمجموعة كُل صفوف تكافؤ العلاقة ρ بالرمز P/ρ أي

$$P/\rho = \{\overline{a} \ : \ a \in P\}$$

وتسمى هذه المجموعة بمجموعة الخارج.

تمهيدية: لتكن P مجموعة ما غير خالية ، ولتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P ، وليكن $a, b \in P$ عنصرين كيفيين من عناصر المجموعة P عندئذٍ فإن:

$$a \in \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

البرهان:

$\overset{\Leftarrow}{\text{لزوم الشرط}}$ لنفرض أن $\overline{a} = \overline{b}$ و لنثبت أن $a \in \overline{b}$.

$$a \in \overline{a} \underset{\text{من الفرض}}{=} \overline{b} \Rightarrow a \in \overline{b} \quad \text{من تعريف صف التكافؤ}$$

$\overset{\Rightarrow}{\text{كفاية الشرط}}$ لنفرض أن $a \in \overline{b}$ و لنثبت أن $\overline{a} = \overline{b}$.

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

بما أن $a \in \overline{b}$ فهذا يعني "بحسب تعريف صف التكافؤ" أن $b \rho a$ وبما أن ρ علاقة تكافؤ فرضاً فهي إذاً تناظرية وبالتالي $a \rho b$.

لنأخذ عنصر كيفي $x \in \overline{a}$ وهذا يعني "بحسب تعريف صف التكافؤ" أن $a \rho x$ وبما أن ρ علاقة تكافؤ فرضاً فهي إذاً تناظرية وبالتالي $x \rho a$.

$$\left.\begin{matrix} x \rho a \\ \wedge \\ a \rho b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{\substack{\rho \text{ علاقة تكافؤ} \\ \text{فهي متعدية}}}{} \quad x \rho b \quad \Rightarrow \underset{\substack{\rho \text{ علاقة تكافؤ} \\ \text{فهي تناظرية}}}{} \quad b \rho x \quad \Rightarrow \underset{\substack{\text{بحسب تعريف} \\ \text{صف التكافؤ}}}{} \quad x \in \overline{b}$$

أصبح لدينا

أخذنا عنصر كيفي $x \in \overline{a}$ ووجدنا أن $x \in \overline{b}$ وهذا يعني أن:

$$\overline{a} \subseteq \overline{b} \quad \dots (1)$$

لنأخذ عنصر كيفي $y \in \overline{b}$ وهذا يعني "بحسب تعريف صف التكافؤ" أن $b \rho y$.

$$\left.\begin{matrix} a \rho b \\ \wedge \\ b \rho y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{\substack{\rho \text{ علاقة تكافؤ} \\ \text{فهي متعدية}}}{} \quad a \rho y \quad \Rightarrow \underset{\substack{\text{بحسب تعريف} \\ \text{صف التكافؤ}}}{} \quad y \in \overline{a}$$

أصبح لدينا

أخذنا عنصر كيفي $y \in \overline{b}$ ووجدنا أن $y \in \overline{a}$ وهذا يعني أن:

$$\overline{b} \subseteq \overline{a} \quad \dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\overline{a} = \overline{b}$.

وهو المطلوب

نتيجة: يتبين لنا من التمهيدية السابقة أن صفا التكافؤ لعنصرين a, b من P متساويين إذا وفقط إذا انتمى عنصر من هذين العنصرين إلى صف تكافؤ العنصر الآخر.

تعريف: لتكن P مجموعة ما غير خالية ، ولنفرض أن $\sum$ أسرة من المجموعات الجزئية من P أي

$$\sum = \{A_i : \quad A_i \subset P \quad , \quad i \in I\}$$

نقول عن الأسرة $\sum$ أنها تشكل تجزئة للمجموعة P إذا تحققت الشروط الآتية:

1) $\forall A_i \in \sum \quad \Rightarrow \quad A_i \neq \phi$

أي أن جميع عناصر الأسرة $\sum$ هي مجموعات غير خالية.

2) $\forall A_i, A_j \in \sum \quad \Rightarrow \begin{matrix} A_i \cap A_j = \phi & \text{إما} \\ A_i = A_j & \text{أو} \end{matrix}$

فائدة: إن $I \subseteq \mathbb{N}$ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية ، وقد تكون I منتهية أو غير منتهية.

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$

$$3)\ \bigcup_{i\in I} A_i = P$$

أي أن اجتماع جميع عناصر الأسرة $\sum$ يساوي إلى المجموعة P.

تمهيدية: لتكن P مجموعة ما غير خالية ، ولتكن ρ علاقة تكافؤ معرفة على المجموعة P عندئذٍ فإن المجموعة

$$P/\rho = \{\overline{a} \ :\ a \in P\}$$

تشكل تجزئة للمجموعة P.

البرهان: لإثبات ذلك نتحقق من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف السابق.

1- لنأخذ $\overline{a} \in P/\rho$ بحيث أن $a \in P$ كيفي ولنثبت أن $\overline{a} \neq \phi$ وهذا واضح لأن $\overline{a}$ على الأقل يحوي ممثلهُ أي $a \in \overline{a}$ ومنهُ $\overline{a} \neq \phi$. (الشرط الأول من شروط التجزئة محقق)

2- لنأخذ $\overline{a}, \overline{b} \in P/\rho$ بحيث أن $a, b \in P$ كيفيين.

- إذا كان $\overline{a} \cap \overline{b} = \phi$ يتم المطلوب.

- لنفرض أن $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \phi$ عندئذٍ يوجد عنصر مثل c بحيث $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$ ومنهُ:

$$c \in \overline{a} \cap \overline{b} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب تعريف التقاطع}} \left.\begin{matrix} c \in \overline{a} \\ c \in \overline{b} \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالاستعانة بالتمهيدية السابقة}} \left.\begin{matrix} \overline{c} = \overline{a} \\ \overline{c} = \overline{b} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

(الشرط الثاني من شروط التجزئة محقق)

3- إن كُل مجموعة يمكن كتابتها على شكل اجتماع لكل المجموعات الجزئية والوحيدة العنصر منها أي:

$$P = \bigcup_{a\in P} \{a\} \quad ...*$$

نعلم أن $a \in \overline{a}\ ;\ \forall a \in P \Rightarrow \{a\} \subseteq \overline{a}\ ;\ \forall a \in P \Rightarrow \bigcup_{a\in P} \{a\} \subseteq \bigcup_{a\in P} \overline{a}$

بالاستفادة من الأخيرة في * نجد أن:

$$P \subseteq \bigcup_{a\in P} \overline{a} \quad ...(1)$$

هذه من جهة ، ومن جهة أُخرى

نعلم أن $\overline{a} \subseteq P\ ;\ \forall a \in P \Rightarrow \bigcup_{a\in P} \overline{a} \subseteq P \quad ...(2)$

من (1) و (2) نجد أن:

$$P = \bigcup_{a\in P} \overline{a} = \bigcup_{\overline{a}\in P/\rho} \overline{a}$$

(الشرط الثالث من شروط التجزئة محقق)

مما سبق نستنتج أن المجموعة P/ρ (مجموعة الخارج) تشكل تجزئة للمجموعة P.

نتيجة: يتبين لنا من التمهيدية السابقة أننا نستطيع الحصول على تجزئة للمجموعة P من خلال علاقة تكافؤ معرفة على P.

مُبرهنة: لتكن P مجموعة ما غير خالية ، ولتكن $\sum$ تجزئة للمجموعة P عندئذٍ فإن العلاقة ρ المعرفة على المجموعة P بالشكل الآتي:

$$\forall\, a,b \in P \quad , \quad a\,\rho\,b \Leftrightarrow \exists\, A \in \sum \;:\; a,b \in A$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P.

وأن صفوف تكافؤ هذه العلاقة **هي وفقط هي** عناصر التجزئة $\sum$ أي أن

$$\sum = P/\rho$$

البرهان: سوف نثبت **أولاً** أن العلاقة ρ المعرفة على المجموعة P بالفرض هي عُلاقة تكافؤ على P.

بما أن $\sum$ تجزئة للمجموعة P فهذا يعني "بحسب الشرط الثالث من شروط التجزئة" أن

$$P = \bigcup_{A\in\sum} A$$

- لنأخذ عنصر كيفي $a \in P$ فحسب ما سبق يكون:

$$a \in \bigcup_{A\in\sum} A$$

واستناداً لتعريف عملية الاجتماع فإنهُ يوجد $A \in \sum$ بحيث أن $a \in A$ واستناداً إلى تعريف العلاقة ρ نجد أن $a\,\rho\,a$.

أخذنا عنصر كيفي $a \in P$ ووجدنا أن $a\,\rho\,a$ أي أن العلاقة ρ انعكاسية.

- لنأخذ عنصرين كيفيين $a,b \in P$ ولنفرض أن $a\,\rho\,b$ وهذا يعني "استناداً لتعريف العلاقة ρ" أن

$$\exists\, B \in \sum \;:\; a,b \in B$$

وبالتالي:

$$\exists\, B \in \sum \;:\; b,a \in B$$

واستناداً لتعريف العلاقة ρ نجد أن $b\,\rho\,a$.

أخذنا عنصرين كيفيين $a,b \in P$ وفرضنا أن $a\,\rho\,b$ ووجدنا $b\,\rho\,a$ أي أن العلاقة ρ تناظرية.

- لنأخذ ثلاث عناصر كيفية $a,b,c \in P$ ولنفرض أن $a\,\rho\,b$ و $b\,\rho\,c$.

بما أن $a\,\rho\,b$ فحسب تعريف العلاقة ρ يوجد $C \in \sum$ بحيث أن $a,b \in C$.

بما أن $b\,\rho\,c$ فحسب تعريف العلاقة ρ يوجد $D \in \sum$ بحيث أن $b,c \in D$.

$$\left.\begin{array}{c} C \in \sum \ , \ D \in \sum \\ and \\ P \text{ تجزئة للمجموعة } \sum \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{استخدم الشرط الثاني} \\ \text{من شروط التجزئة} \\ \text{وانتبه إلى أن } C \cap D \neq \phi \\ \text{كون } b \in C \text{ و } b \in D}}{\Rightarrow} \quad C = D \ \Rightarrow a, c \in C$$

وبالتالي:

$$\exists\, C \in \sum \ : \ a, c \in C$$

واستناداً لتعريف العلاقة ρ نجد أن $a \ \rho \ c$.

أخذنا ثلاث عناصر كيفية $a, b, c \in P$ وفرضنا أن $a \ \rho \ b$ و $b \ \rho \ c$ ووجدنا أي أن العلاقة $a \ \rho \ c$ متعدية.

مما سبق نستنتج أن العلاقة ρ المعرفة بالفرض هي علاقة تكافؤ على المجموعة P.

ثانياً: لنثبت أن صفوف تكافؤ العلاقة ρ **هي وفقط هي** عناصر التجزئة $\sum$ أي لنثبت أن

$$\sum = P/\rho$$

لنأخذ $\overline{a} \in P/\rho$ بحيث أن $a \in P$ كيفي ، وبما أن $\sum$ تجزئة للمجموعة P فرضاً فإنه يوجد $D \in \sum$ بحيث $a \in D$.

سوف نثبت أن:

$$\overline{a} = D$$

لنأخذ عنصر كيفي $x \in D$ ، وبما أن $a \in D$ فنجد بحسب تعريف العلاقة ρ أن $a \ \rho \ x$ ومنهُ "بحسب تعريف صف التكافؤ" نجد أن:

$$x \in \overline{a}$$

أخذنا عنصر كيفي $x \in D$ ووجدنا أن $x \in \overline{a}$ مما يعني أن $\underbrace{D \subseteq \overline{a}}_{(1)}$.

لنأخذ عنصر كيفي $y \in \overline{a}$ عندئذٍ "بحسب تعريف صف التكافؤ" يكون $a \ \rho \ y$.

من الأخيرة "وبحسب تعريف العلاقة ρ" فإنهُ يوجد $K \in \sum$ بحيث أن $a, y \in K$.

أصبح لدينا $D, K \in \sum$ و $a \in D, K$ بالتالي $D, K \in \sum$ و $a \in D \cap K$ ، وبما أن $\sum$ تجزئة للمجموعة P فإن $D = K$ أي أن $y \in D$.

أخذنا عنصر كيفي $y \in \overline{a}$ ووجدنا أن $y \in D$ مما يعني أن $\underbrace{\overline{a} \subseteq D}_{(2)}$.

من (1) و (2) نجد أن:

$$\overline{a} = D$$

بالعودة للبداية نجد أننا أخذنا $\overline{a} \in P/\rho$ بحيث أن $a \in P$ كيفي ووجدنا أن $\overline{a} = D \in \sum$ مما يعني أن

$$\underbrace{P/\rho \subseteq \sum}_{(1)'}$$

لنأخذ عنصر كيفي وليكن $E \in \sum$ وبما أن $\sum$ تجزئة للمجموعة P فحسب الشرط الأول من شروط التجزئة نجد أن $E \neq \phi$ وهذا يعني أنهُ على الأقل يوجد عنصر وليكن $e \in E$.

سوف نثبت أن:

$$\overline{e} = E$$

لنأخذ عنصر كيفي $x \in E$ ، وبما أن $e \in E$ فنجد بحسب تعريف العلاقة ρ أن $e\ \rho\ x$ ومنهُ "بحسب تعريف صف التكافؤ" نجد أن:

$$x \in \overline{e}$$

أخذنا عنصر كيفي $x \in E$ ووجدنا أن $x \in \overline{e}$ مما يعني أن $\underbrace{E \subseteq \overline{e}}_{(1)''}$.

لنأخذ عنصر كيفي $y \in \overline{e}$ عندئذٍ "بحسب تعريف صف التكافؤ" يكون $e\ \rho\ y$.

من الأخيرة "وبحسب تعريف العلاقة ρ" فإنهُ يوجد $F \in \sum$ بحيث أن $e, y \in F$.

أصبح لدينا $E, F \in \sum$ و $e \in E, F$ بالتالي $E, F \in \sum$ و $e \in E \cap F$ ، وبما أن $\sum$ تجزئة للمجموعة P فإن $E = F$ أي أن $y \in E$.

أخذنا عنصر كيفي $y \in \overline{e}$ ووجدنا أن $y \in E$ مما يعني أن $\underbrace{\overline{e} \subseteq E}_{(2)''}$.

من $(1)''$ و $(2)''$ نجد أن:

$$\overline{e} = E$$

وبالتالي إذا عدنا نجد أننا أخذنا $E \in \sum$ كيفي ووجدنا أن $E = \overline{e} \in P/\rho$ مما يعني أن $\underbrace{\sum \subseteq P/\rho}_{(2)'}$

من $(1)'$ و $(2)'$ نجد أن:

$$\sum = P/\rho$$

انتهت المحاضرة الأولى

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 − Tel : 011 2124436