جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

المعادلات التفاضلية (1)

المحاضرة السادسة

تاريخ المحاضرة: 26/10/2015

مدرس المقرر: د. خليل يحيى

الفقرة السادسة: المعادلات التفاضلية غير الخطية والتي ترد (تتحول) إلى خطية.

مُعادلة برنولي التفاضلية: نسمي كُل مُعادلة من الشكل

$$y' + p(x).y = q(x).y^n \quad ...(1)$$

بمعادلة برنولي التفاضلية بحيث $n \neq 1$ ، p, q دوال معرفة ومستمرة على مجال ما من $\mathbb{R}$.

إيجاد الحل العام لمعادلة برنولي التفاضلية(1):

أولاً: نقسم طرفي المعادلة (1) على y^n فنحصل على

$$\frac{y'}{y^n} + p(x).\frac{y}{y^n} = q(x) \Rightarrow \frac{y'}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}}.p(x) = q(x) \quad ...(2)$$

ثانياً: نجري تغييراً في التابع y من الشكل:

$$\underbrace{z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-(n-1)} = y^{1-n}}_{*} \quad ; \quad z = z(x)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x \text{ نشتق بالنسبة لـِ}} \quad z' = (1-n)y^{1-n-1}.y' = (1-n)y^{-n}.y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1-n}.y^n.z' \quad ...**$$

نعوض * و ** في (2) لنحصل من ذلك على:

$$\frac{1}{1-n}.z' + z.p(x) = q(x) \Rightarrow z' + (1-n)p(x).z = (1-n)q(x)$$

والأخيرة ما هي إلا معادلة تفاضلية خطية التابع فيها هو z والمتحول هو x نوجد الحل العام لها كما تعلمنا في الفقرة الخامسة وبعد الحصول على هذا الحل نعود للتابع القديم (من $*$) لنحصل على الحل العام لمعادلة برنولي التفاضلية (1).

أمثلة على الفقرة السادسة

مثال(1): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2y}$$

الحل: إن المعادلة المفروضة تكتب بالشكل الآتي

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2}.y^{-1} \quad ...(1)$$

والأخيرة لها الشكل العام الآتي

$$y'+p(x).y=q(x).y^n \quad ; \quad p(x)=-\frac{1}{x} \quad , \quad q(x)=\frac{1}{2} \quad , \quad n=-1$$

وهي معادلة برنولي التفاضلية ، ولإيجاد الحل العام لها نقسم طرفي المعادلة (1) على y^{-1} فنحصل على

$$\frac{y'}{y^{-1}}-\frac{1}{x}.\frac{y}{y^{-1}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \; y.y'-\frac{1}{x}y^2=\frac{1}{2} \quad \dots(2)$$

نجري تغييراً في التابع y من الشكل:

$$\underbrace{z=\frac{1}{y^{-1-1}}=\frac{1}{y^{-2}}=y^2}_{*} \quad ; \quad z=z(x)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{نشتق بالنسبة لـِ } x} \quad z'=2yy' \Rightarrow \; yy'=\frac{z'}{2} \dots **$$

نعوض * و ** في (2) لنحصل من ذلك على:

$$\frac{z'}{2}-\frac{1}{x}z=\frac{1}{2} \Rightarrow \; z'-\frac{2}{x}.z=1 \;\dots(3)$$

والأخيرة ما هي إلا معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة والتابع المجهول فيها هو z والمتحول هو x ولإيجاد الحل العام لها نتبع الآتي:

نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الناتجة عنها بدون الطرف الثاني أي للمعادلة

$$z'-\frac{2}{x}.z=0 \;\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z \Rightarrow \frac{dz}{z}=\frac{2}{x}dx \;\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int\frac{dz}{z}=\int\frac{2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln|z|=2\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{C}\right|=\ln|x^2| \;\Rightarrow \frac{z}{C}=x^2 \Rightarrow \; z=C.x^2$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (بدون طرف ثاني) وبحيث C اختياري.

نعتبر $C=C(x)$ فنحصل على

$$z=C(x).x^2 \quad \dots ***$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$z'=C'(x).x^2+2x.C(x)$$

نعوض عبارة z' وعبارة z في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة أي في (3) لنحصل على

$$C'(x).x^2+2x.C(x)-\frac{2}{x}.C(x).x^2 \;=1 \;\Rightarrow$$

$$C'(x).x^2+2x.C(x)-2x.C(x) \;=1 \;\Rightarrow C'(x).x^2=1 \Rightarrow C'(x)=x^{-2}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} C(x) = -\frac{1}{x} + C_1 \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C_1$$

نعوض في *** فنجد أن:

$$z = \left(-\frac{1}{x} + C_1\right)x^2 \Rightarrow z = -x + C_1.x^2 \quad ; \quad \text{ثابت من اختياري } C_1$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (3) ، وبالعودة للتابع القديم (من *) أي بتعويض في الأخيرة كُل z بِـ $z = y^2$ نحصل على:

$$y^2 = -x + C_1.x^2 \quad ; \quad \text{ثابت من اختياري } C_1$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$y' + 2xy = -xy^4$$

الحل: إن المعادلة المفروضة لها الشكل العام الآتي

$$y' + p(x).y = q(x).y^n \quad ; \quad p(x) = 2x \quad , \quad q(x) = -x \quad , \quad n = 4$$

وهي معادلة برنولي التفاضلية ، ولإيجاد الحل العام لها نقسم طرفيها على y^4 فنحصل على

$$\frac{y'}{y^4} + 2x.\frac{y}{y^4} = -x \Rightarrow y^{-4}.y' + 2x.\frac{1}{y^3} = -x \quad \dots (1)$$

نجري تغييراً في التابع y من الشكل:

$$\underbrace{z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}}_{*} \quad ; \quad z = z(x)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x \text{ نشتق بالنسبة لِـ}} \quad z' = -3y^{-4}y' \Rightarrow y^{-4}y' = -\frac{z'}{3} \quad \dots **$$

نعوض * و ** في (1) لنحصل من ذلك على:

$$-\frac{z'}{3} + 2xz = -x \Rightarrow z' - 6xz = 3x \quad \dots (2)$$

والأخيرة ما هي إلا معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة والتابع المجهول فيها هو z والمتحول هو x ولإيجاد الحل العام لها نتبع الآتي:

نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الناتجة عنها بدون الطرف الثاني أي للمعادلة

$$z' - 6xz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 6xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = 6xdx \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int \frac{dz}{z} = \int 6xdx$$

$$\Rightarrow \ln|z| = 3x^2 + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{C}\right| = 3x^2 \Rightarrow \frac{z}{C} = e^{3x^2} \Rightarrow z = C.e^{3x^2}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (بدون طرف ثاني) وبحيث C اختياري.

نعتبر $C = C(x)$ فنحصل على

$$z = C(x).e^{3x^2} \quad ...***$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$z' \underbrace{=}_{\substack{\text{لا تنسى} \\ \text{مشتق جداء}}} C'(x).e^{3x^2} + 6x.C(x).e^{3x^2}$$

نعوض عبارة z' وعبارة z في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة أي في (2) لنحصل على

$$C'(x).e^{3x^2} + 6x.C(x).e^{3x^2} - 6x.C(x).e^{3x^2} = 3x \Rightarrow$$

$$C'(x).e^{3x^2} = 3x \Rightarrow C'(x) = 3xe^{-3x^2} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int C'(x)dx = \int 3xe^{-3x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int C'(x)dx = -\frac{1}{2}\int(-6x)e^{-3x^2}dx \Rightarrow C(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C_1 \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

نعوض في *** فنجد أن:

$$z = \left(-\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C_1\right)e^{3x^2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + C_1.e^{3x^2} \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت من اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (2)، وبالعودة للتابع القديم (من *) أي بتعويض في الأخيرة كُل z بِـ $z = y^4$ نحصل على:

$$y^4 = -\frac{1}{2} + C_1.e^{3x^2} \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت من اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

انتهت المحاضرة السادسة