الموضوع: المحاضرة الخامسة

مبرهنة: ليكن $f: M \longrightarrow N$ تشاكل

M_1 مودول جزئي من M

N_1 " " " N

عندها: 1) $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1)) = M_1 + \ker f$

2) $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) = N_1 \cap \operatorname{Im} f$

نتيجة: 1) $\ker f \subseteq M_1 \Leftrightarrow \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(M_1)) = M_1$

2) $N_1 \subset \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(N_1)) = N_1$

ملاحظة: $f: M \to N$ تشاكل مودولي

عندها: 1) $f(0_M) = 0_N$

2) $\forall x \in M \; ; \; f(-x) = -f(x)$

3) f تشاكل متباين $\Leftrightarrow \ker f = 0$

4) f تشاكل غامر $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = N$

أمثلة عن التشاكلات:

1 - G_1 ، G_2 زمرتين تبديليتين ، عندها أي تشاكل زمري

$f: G_1 \to G_2$

هو تشاكل مودولي

$\forall \alpha \in \mathbb{Z} \; , g_1 \in G$ $\quad f(\alpha g_1) = \alpha . f(g_1)$

$0<\alpha$: حسب تشاكل زمري — حسب قانون التشكيل الخارجي (في المحاضرة ١)

$$f(\alpha . g_1) = f(\underbrace{g_1+\cdots+g_1}_{\alpha \text{ مرة}}) = f(g_1)+\cdots+f(g_1)$$

$$\underset{\text{حسب قانون التشكيل الخارجي}}{=} \alpha . f(g_1)$$

الوظيفة: في حالة $0=\alpha$ و $0>\alpha$ (المسألة: هل $0<\alpha$؟)

<u>مثال 2</u>: ليكن M مودول على حلقة A والحلقة A تبديلية
وليكن $a \in A$

$$f : M \longrightarrow M$$
$$m \longrightarrow a.m$$

عندها f تشاكل مودولي الإثبات وظيفة.

<u>مثال 3</u>: ليكن M مودول على حلقة A ولنعرف:

$$M^n = \{ (m_1, \ldots, m_n) ; m_i \in M \ , i = 1, \ldots, n \}$$

نعرف على M^n القانون: (قانون تشكيل داخلي)

$$(m_1, \ldots, m_n) + (m'_1, \ldots, m'_n)$$
$$= (m_1+m'_1, \ldots, m_n+m'_n) \in M^n$$

$\lambda \in A \ , \ (m_1, \ldots, m_n) \in M^n$: (قانون تشكيل خارجي)

$$\lambda . (m_1, \ldots, m_n) = (\underbrace{\lambda m_1}_{\in M}, \ldots, \underbrace{\lambda m_n}_{\in M}) \in M^n$$

وظيفة اثبات M^n هو A مودول

$$pr_J : M^n \to M$$

$$(m_1, \dots, m_n) \to m_J$$

حيث $J \in \{1, \dots, n\}$

تشاكل إسقاط على المركبة J وهو تشاكل تام

$$pr_1 : M \times N \to M$$

$$(x, y) \to x$$

$$(a, 0) \to a$$

إسقاط على المركبة الأولى (أي سيحتفظ بالمركبة الأولى x)

$$pr_2 : M \times N \to N$$

$$(x, y) \to y$$

$$(0, n) \to n$$

إسقاط على المركبة الثانية

المطلوب إثبات أنه تشاكل

كذلك من أجل $J \in \{1, \dots, n\}$ يمكن تعريف:

$$\varepsilon_1 : M \to M^n$$

$$m \to (m, 0, \dots, 0)$$

$$\varepsilon_J : M \to M^n$$

$$m \to (0, \dots, m, \dots, 0)$$

في المرتبة J

تشاكل مونومي ومتباين

(الاحتواء القانوني ، التباين القانوني)

مودول القسمة :

M مودول على A وليكن N مودول جزئي من M عندها:
نعرف علاقة ثنائية R على M كما يلي

$$x R y \iff x - y \in N$$
$$\iff x \equiv y \pmod{N}$$

$x, y \in M$

لأن R علاقة تكافؤ
(انعكاسية ، تناظرية ، متعدية)

نأخذ مجموعة صفوف التكافؤ ، تشكل المجموعة التالية:

$$M/N = \frac{M}{N} = \{ m + N \ ; m \in M \}$$

سوف نعرف قانون تشكيل داخلي وخارجي على مجموعة صفوف التكافؤ:

لنعرف: $(+)$: ليكن $m_2 + N$ ، $m_1 + N$
عناصر كيفية من M/N ولكن $\lambda \in A$ عندها

$$\bullet) \ (m_1 + N) + (m_2 + N) = \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\in M} + N \in \frac{M}{N}$$

$$\bullet\bullet) \ \lambda (m_1 + N) = \underbrace{\overbrace{\lambda m_1}^{\in M} + N}_{\in M/N}$$

عندها $(M/N, +, \cdot)$ مودول على A

اثبات انها مودول ☺ :

لأن $(M/N, +)$ هي زمرة تبديلية لأنها:

الموضوع: .... / /

1 - محايد هو N

$$(m+N)+(0+N) = (m+0)+N = m+N$$

2 - النظير: $(m+N)+(-m+N) = (m+(-m))+N$

$$= 0+N = N$$

3 - تجميعي واضحة

4 - تبديلي واضحة

كذلك:

1) $1.(m+N) = 1.m+N = m+N$

2) $\alpha.([m_1+N]+[m_2+N]) = \alpha\,[(m_1+m_2)+N]$

حسب قانون جمع أي عنصرين

$$= \alpha(m_1+m_2)+N$$

حسب قانون التشكيل الخارجي

$$= (\alpha m_1+\alpha m_2)+N = (\alpha m_1+N)+(\alpha m_2+N)$$

حسب الجمع

$$= \alpha.(m_1+N)+\alpha(m_2+N)$$

الضرب في M/N

حسب قانون الضرب

3) $(\alpha+\beta).(m+N) = (\alpha+\beta)m+N$

حسب قانون التشكيل الخارجي

$$= (\alpha m+\beta m)+N = (\alpha m+N)+(\beta m+N)$$

حسب الجمع المعرف

$$= \alpha \cdot (m+N) + \beta\,(m+N) = \alpha \cdot (\beta \cdot (m+N))$$

حسب قانون الضرب

$$= \alpha \cdot [\beta m + N] = \alpha \cdot (\beta m) + N = (\alpha \cdot \beta) \cdot m + N$$

حسب قانون التشغيل الخارجي

ومنه $\boxed{M/N \text{ مودول}}$ ~~[illegible]~~ العشرية .

مثال: ليكن M مودول على حلقة A ، وليكن N مودول جزئي من M عندها . يوجد تشاكل الغمر القانوني

$$\pi : M \to M/N$$
$$m \to m+N$$

(تشاكل مودولي + غامر)

مبرهنة: ليكن M مودول على A و N مودول جزئي من M عندها يوجد ~~[illegible]~~ تطبيق f

$$f : \left\{ \begin{array}{c} P \text{ المودولات الجزئية} \\ N \text{ من } M \text{ التي تحوي} \\ N \subseteq P \subseteq M \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{تقابل}} \left\{ \begin{array}{c} \text{المودولات الجزئية} \\ M/N \end{array} \right\}$$

$$P \to P/N$$

1) يجب إثبات أن P/N معرف من M/N

2) الخطوة الثانية اثبات العلاقة $\Leftarrow$ أنها تقابل

البرهان: 1 ـ من أجل $N \subset P \subset M$ حيث P مودول جزئي من M

فإن P/N مودول جزئي من $\frac{M}{N}$

/ /

الموضوع: ....

إذن $\emptyset \neq P/N$ لأن $0+N \in P/N$

ليكن $\alpha, \beta \in A$

(P_1+N) ، (P_2+N) عناصر كيفية من $\frac{P}{N}$

ومنه

قانون تشكيل الخارجي

$$\alpha.(P_1+N)+\beta(P_2+N)$$
$$=(\alpha P_1+N)+(\beta.P_2+N)=(\underbrace{\alpha P_1+\beta P_2}_{\in P})+N$$

ومنه $\in P/N$

c) اثبات f تطبيق واضح

f متباين لأن:

$$P_1/N = P_2/N$$

حيث P_1 و P_2 مودولات جزئية من M تحوي N

ولنبرهن أن $P_1=P_2$

$$r_1 \in P_1 \Longrightarrow r_1+N \in P_1/N = P_2/N$$
$$\Longrightarrow r_1+N \in P_2/N$$
$$\Longrightarrow \exists\, r_2 \in P_2 : r_1+N = r_2+N$$
$$\Longrightarrow \cancel{r_1 - r_2 \in N \subset P_2} \quad r_1 \in r_2+N$$
$$\Longrightarrow r_1 = r_2+n \; ; \; n \in N$$
$$\Longrightarrow r_1 - r_2 \in N \subset P_2$$
$$\Longrightarrow r_1 - r_2 \in P_2 \longrightarrow r_1 - r_2 = \alpha \; : \alpha \in P_2$$
$$\longrightarrow r_1 = \underbrace{r_2}_{\in P_2} + \underbrace{\alpha}_{\in P_2} \in P_2$$

الموضوع: .... / /

ومنه $P_1 \subseteq P_2$ وبنفس الأسلوب نجد $P_2 \subseteq P_1$ ومنه نجد $P_1 = P_2$

f تمارين: ليكن Q مودول جزئي من M/N ولنعرف المجموعة

$$U = \{ x \in M : x + N \in Q \}$$

إثبات أن:

أ) $U \in$ المنطلق ب) $f(U) = Q$

أ) U مودول جزئي من M يحوي N

$U \neq \emptyset$ لأن $N \in Q$

ليكن $x, y \in U$ ، $\alpha, \beta \in A$ عناصر كيفية ولنبرهن أن:

$$(\alpha x + \beta y) + N \overset{?}{\in} Q$$

$$(\alpha x + \beta y) + N = \alpha \underbrace{(x+N)}_{\in Q} + \beta \underbrace{(y+N)}_{\in Q} \in Q$$

$$\alpha x + \beta y \in U$$

U هو عنصر في المنطلق

ب) لحساب $f(U)$

$$u + N \in Q$$

$$f(U) = \{ u + N ; u \in U \}$$
$$= \{ u + N \in Q \} = Q$$

حسب التعريف

2015/10/29 الموضوع: المحاضرة 6

هذه المحاضرة ليست موجودة في الكتاب

مراجعة: مودول القسمة

$$\frac{M}{N} = \{ x+N ; x \in M \}$$

$$\lambda \in A \ , \ x+N \in \frac{M}{N}$$

$$\lambda . (x+N) = \lambda x + N$$

تشاكل مودولي:

$$\pi : M \xrightarrow{\pi} M/N$$

$$m \longrightarrow m+N$$

تشاكل مودولي + غامر

$$\ker \pi = N$$

$$\ker \pi = \{ m \in M : m+N = N \}$$

$$= \{ m \in M : m \in N \} = N$$

المودولات الجزئية $\xleftrightarrow{\text{تقابل } (1-1)}$ المودولات الجزئية

من M التي تحوي N من M/N.

~~مبرهنة~~ مبرهنات أساسية في نظرية المودولات:

مبرهنة: ليكن M و N مودولات على حلقة A ولنأخذ

$f : M \to N$ تشاكل مودولي

لنفرض P مودول جزئي من M بحيث $P \subseteq \ker f$ عندها

يوجد تشاكل

$$\hat{f} : M/P \to N$$

وحيد بحيث يحقق الشروط التالية.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/p \arrow[ur, dashed, "\exists \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\tilde{f} \circ \pi = f \qquad (1$$

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P} \qquad (2$$

$$\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f \qquad (3$$

$\tilde{f}$ يصور عناصر M/P ويضعها في N

البرهان: لنأخذ العلاقة: $\tilde{f} : \frac{M}{P} \to N$

$$m+P \to f(m) = \tilde{f}(m+P)$$

إن $\tilde{f}$ المعرف سابقاً هو تطبيق لأن:

$$m_1 + P = m_2 + P$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 \in P \subset \ker f$$

$$f(m_1 - m_2) = 0$$

f تشاكل

$$f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow \tilde{f}(m_1+P) = \tilde{f}(m_2+P)$$

$\tilde{f}$ تشاكل لأن:

•) $\hat{f}\left[(m_1+P) + (m_2+P)\right]$

$$= \tilde{f}((m_1+m_2)+P) = f(m_1+m_2)$$

$$= f(m_1+m_2) = f(m_1) + f(m_2)$$

$$= \tilde{f}(m_1+P) + \tilde{f}(m_2+P)$$

••) $\tilde{f}(\lambda.(m_1+P)) = \tilde{f}(\lambda m_1 + P)$

$$= f(\lambda m_1) = \lambda . f(m_1) = \lambda . \tilde{f}(m_1+P)$$

لأن f تشاكل

$f : M \to N$

$\ker f = \{ r \in M : f(r) = 0 \}$ ، $\operatorname{Im} f = \{ f(r) \in N : r \in M \}$

/ /

الموضوع: ....

حيث $\lambda \in A$ و $m_1 + P$ ، $m_2 + P$ عناصر كيفية من M/P

$\tilde{f}(\pi(m))$

1) $\tilde{f} \circ \pi(m) = \tilde{f}(m+P)$

$\forall m \in M \qquad = f(m)$

شكل عرض توي

$$
\begin{tikzcd}
m \arrow[r] \arrow[d, bend right] & f(m) \\
M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \\
M/P \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[u, phantom] & \\
m+P &
\end{tikzcd}
$$

إذاً $\tilde{f} \circ \pi = f$

2) $\ker \tilde{f} = \{ m+P \in \frac{M}{P} : \tilde{f}(m+P) = 0 \}$

$= \{ m+P \in \frac{M}{P} : f(m) = 0 \}$

$= \{ m+P \in \frac{M}{P} : m \in \ker f \}$

$= \ker f / P$

3) $\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} \tilde{f} = \{ \tilde{f}(m+P) \in N ; m+P \in M/P \}$

$= \{ f(m) : m \in M \} = \operatorname{Im} f$

$\boxed{P = \ker f}$ حالة خاصة (نتيجة 1)

حسب الشرط (2) $\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P}$

$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{\ker f} = \{0 + h \,;\, h \in \ker f\} = \ker f = 0$

$$\Rightarrow \ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{\ker f} = \{0\}$$

وهذا يكافئ كون $\tilde{f}$ متباينا

من في المبرهنة الخاصة f تشاكل متباين $\Leftrightarrow \ker f = 0$

$\tilde{f} : \frac{M}{\ker f} \longrightarrow N$ متباين

إذاً $\tilde{f} : \frac{M}{\ker f} \longrightarrow \operatorname{Im} \tilde{f}$ تماثل

أي $\frac{M}{\ker f} \cong \operatorname{Im} \tilde{f}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & N \\ M/P \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

ومنه $\boxed{\frac{M}{\ker f} \cong \operatorname{Im} f}$

نتيجة: $f : M \longrightarrow N$ تشاكل

عندها:

$$\boxed{M/\ker f \cong \operatorname{Im} f}$$

حالة خاصة: إذا كان f تشاكل غامر عندها $M/\ker f \cong N$

نتيجة (2): ليكن M مودول على حلقة A

وليكن N_1 و N_2 مودولين جزئيين من M بحيث $\boxed{N_1 \subseteq N_2}$ عندها

$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}$$

تشاكل
الغمر القانوني

البرهان: لدينا $f: M \to \frac{M}{N_2}$

$m \to m + N_2$

دائماً على مستعاد الشكل يكون تشاكل + غامر ونواته تساوي المقام

هو تشاكل الغمر القانوني (تشاكل + غامر)

ونواته $\ker f = N_2$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & M/N_2 \\ \frac{M}{N_1} \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & \end{tikzcd}$$

إذن $N_1 \subseteq N_2$ حسب المبرهنة ★

يوجد تشاكل:

$$\tilde{f} : \frac{M}{N_1} \longrightarrow \frac{M}{N_2}$$

$$m + N_1 \longrightarrow \tilde{f}(m + N_1)$$ حيث

$$= f(m)$$

$$= m + N_2$$

كذلك: $\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{N_1} = \frac{N_2}{N_1}$

ومن كون <u>f غامر</u> نجد أن <u>$\tilde{f}$ غامر</u>

$$\tilde{f} : \frac{M}{N_1} \longrightarrow \frac{M}{N_2}$$

غامر

أي $Im\, \tilde{f} = \frac{M}{N_2}$ $\quad m + N_1 \longrightarrow m + N_2$

$$\ker \tilde{f} = \frac{N_2}{N_1}$$

حسب المحاضرة الخامسة

f تشاكل غامر $\Longleftrightarrow$ $Im\, f =$ المستقر

حسب النتيجة (1)

$$\frac{M/N_1}{\ker \tilde{f}} \cong \operatorname{Im} \tilde{f}$$

أي $$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}$$

2015 / 11 / 4

المحاضرة 7

نتيجة (3) : ليكن M مودول على حلقة A وليكن N_1 و N_2 مودولين جزئيين من M عندها،

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

البرهان:

تشاكل غمر قانوني

$$N_2 \xrightarrow{f_1} N_1 + N_2 \xrightarrow{f_2} \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

$$n_2 \longrightarrow 0 + n_2 \qquad\qquad n_1 + n_2 \longrightarrow n_1 + n_2 + N_1$$

صورة الصفر ← صورة الصفر

((f_2 هو تشاكل الغمر القانوني

ولأن N_1 هو مودول جزئي من $N_1 + N_2$

لأن $N_1 \subseteq M$ لأنه مودول جزئي

$N_1 \subseteq N_1 + N_2$

عندها يوجد تشاكل:

$$f : N_2 \longrightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

$$n_2 \longrightarrow \underbrace{n_2 + N_1}_{\text{الناتج من تركيب } f_2 \text{ بعد } f_1} \longrightarrow n_2 + n_1 + N_1 \xrightarrow{\text{لكن}} n_1 \in N_1 : \boxed{n_2 + N_1}$$

$$\begin{aligned} \ker f &= \{ n_2 \in N_2 : n_2 + N_1 = N_1 \} \\ &= \{ n_2 \in N_2 , n_2 \in N_1 \} \\ &= N_1 \cap N_2 \end{aligned}$$

الموضوع: ....

اثبات انه غامر:

f غامر لأن:
$$n_1 + n_2 + N_1 \in \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

$$\rightarrow n_1 + n_2 + N_1 = n_2 + N_1 \rightarrow \exists n_2 \in N_2 :$$
$$f(n_2) = n_2 + N_1 = n_1 + n_2 + N_1$$

$$\rightarrow \text{غامر } f \rightarrow \frac{N_2}{\ker f} \cong \frac{N_1 + N_2}{N_1} \rightarrow \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \cong \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

((فينا ناخذ برهان الكتاب بيناما نتقيد من هنا))

نتيجة 4: ليكن M مودول على حلقة A ولنأخذ N, N', P, P' أربعة مودولات جزئية من M حيث
$$N \subset P \quad , \quad N' \subset P'$$

عندها:
$$\frac{N + (P \cap P')}{N + (P \cap N')} \cong \frac{P \cap P'}{(N \cap P') + (P \cap N')} \cong \frac{N' + (P \cap P')}{N' + (N \cap P')}$$

البرهان:
$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

$$N_2 = P \cap P'$$
$$N_1 = N + (P \cap N')$$

حسب النتيجة (3):
$$\frac{P \cap P'}{(P \cap P') \cap (N + (P \cap N'))} \cong \frac{(P \cap P') + (N + (P \cap N'))}{N + (P \cap N')}$$

لدينا: $N_1+N_2 = \underbrace{(P\cap P')} + (N + \underbrace{(P\cap N')})$

$= (P\cap P') + N$

$N' \subset P'$

$N'\cap P \subset P'\cap P$

حسب $A\cap(B+C) = (A\cap B)+C$ ★

بشرط $C \subseteq A$

$N_1\cap N_2 =$

$= \underbrace{(P\cap P')}_{A} \cap (\overset{B}{N} + \overset{C}{(P\cap N')}) =$

حسب ★ مع العلم أن

$N'\subset P' \Rightarrow N'\cap P \subseteq P'\cap P$

حسب ★

$= ((P\cap P')\cap N) + (P\cap N'))$

$N\subset P \qquad = (N\cap P') + (P\cap N')$

التماثل الثاني وظيفة (على نفس النمط)

((كل مهم)) (المتتاليات التامة)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & B \arrow[l, "f_4"'] \arrow[d, "f_3"] \\ C \arrow[r, "f_2"'] & D \end{tikzcd}$$

هاد تبديلي

المخطط التبديلي $f_2\circ f_1 = f_3\circ f_4$

تعريف: لتكن: $\{f_i : M_i \to M_{i+1}\}_{i\in I}$ أسرة من التشاكلات المودولية

عندها،

$$* \quad \cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

المتتالية * تكون تامة عند الحد M_i إذا حققت ما يلي :

$$\operatorname{Im} f_{i-1} = \ker f_i$$

ونقول عن * أنها تامة $\Longleftrightarrow$ تامة عند كل حد M_i حيث $i \in I$

ملاحظة: 1] $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$

حيث f و g تشاكلات مودولية عندها،

$$\boxed{\operatorname{Im} f \subseteq \ker g} \Longleftrightarrow \boxed{g \circ f = 0}$$

نثبت: $\Longleftarrow$

$$n \in \operatorname{Im} f \longrightarrow \exists m \in M : f(m) = n$$

$$g(n) = g(f(m)) = g \circ f(m) = 0$$

إذاً $n \in \ker g$

$\Longrightarrow$ ليكن $m \in M$ عندها

$$g \circ f(m) = g(\underbrace{f(m)}_{\substack{\in \operatorname{Im} f \\ \subseteq \ker g}}) = 0$$

ومنه $g \circ f = 0$

2] $(*)$ تامة $\Longleftarrow$ $f_i \circ f_{i-1} = 0$

إذا كانت * تامة فيكون $Im f_{i-1} = \ker f_i$

ومنه $\Leftarrow$ $Im f_{i-1} \subset \ker f_i$

$\forall i \in I$

ومنه $\longleftarrow$ $f_i \circ f_{i-1} = 0$

المتتالية القصيرة: $(**)\quad 0 \xrightarrow{(1)} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(2)} 0$

هي متتالية قصيرة من التشاكلات المودولية

تمرين: المتتالية القصيرة (**) تامة إذا وفقط إذا:

1) f تشاكل متباين

2) $Im f = \ker g$

3) g غامر.

الإثبات: (**) تامة $\Leftrightarrow$
- تامة عند M
- تامة عند N
- تامة عند P

$\Leftrightarrow$
- $Im(1) = \ker f \Leftrightarrow 0 = \ker f$ $\Leftrightarrow$ f متباين
- $Im f = \ker g$
- $Im g = \ker(2) \Leftrightarrow Im g = P$ $\Leftrightarrow$ g غامر

وظائف: 1) $0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \rightarrow 0$

$a \rightarrow a$

متتالية قصيرة

$3 \rightarrow 3+2\mathbb{Z}$

اثبات التامة

2) ليكن H و G زمرتين تبديليتين وليكن

$f : H \rightarrow G$ تشاكل زمري

عندها يوجد متتاليتين تامتين:

أ) $0 \rightarrow \ker f \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} \frac{H}{\ker f} \rightarrow 0$

$a \rightarrow a$

نواة π هي $\ker \pi = \ker f$

و $\ker f = Im(i)$

الاثبات أنها تامة قصيرة.

ب) $0 \rightarrow Im f \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{Im f} \rightarrow 0$

الاثبات انها تامة قصيرة

3) $M \xrightarrow{f} N$ تشاكل مودولي

المطلوب $0 \rightarrow ? \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow ?? \rightarrow 0$

ايجاد وظيفة   الحاده وظيفة

نطبقة من أجل $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$n \rightarrow 2n$

مبرهنة :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & M_4 \arrow[d, "\delta"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r, "g_3"'] & N_4
\end{tikzcd}$$

متتالية تامة

عندها : (1) $(\gamma , \alpha$ غامرين و δ متباين)

عندها β غامر ((غامر تعني، أياً كان عنصر من المستقر فيوجد عنصر من المنطلق بحيث صورة المنطلق تساوي المستقر))

(2) $(\delta , \beta$ متباين ، α غامر) $\Leftarrow$ γ متباين

البرهان :

ليكن $n_2 \in N_2$ ومنه $g_2(n_2) \in N_3$

ولدينا γ غامر $\Leftarrow$

$$\exists\, m_3 \in M_3 \quad : \gamma(m_3) = g_2(n_2)$$

لنأخذ صورة الطرفين وفق g_3 :

$$g_3(\gamma(m_3)) = g_3(g_2(n_2)) = g_3 \circ g_2(n_2)$$

تبادلية صورية

تبديلية تامة

$$g_3 \circ \gamma(m_3) = 0 \quad , \delta \circ f_3(m_3) = 0$$

$$\delta(f_3(m_3)) = 0$$

ومنه كون $f_3(m_3) \in \ker\delta$

$f_3(m_3) = 0 \Leftarrow$ δ متباين

فرضاً

$$m_3 \in \ker f_3 = \operatorname{Im} f_2$$

كون التتالية تامة

$$\exists\, m_2 \in M_2 : f_2(m_2) = m_3$$

ومنه :

$$g_2(n_2) = \gamma(m_3) = \gamma(f_2(m_2)) = g_2(\beta(m_2))$$

$$g_2(n_2 - \beta(m_2)) = 0$$

$$\operatorname{Im} g_1 = \ker g_2 \quad \exists\, n_2 - \beta(m_2)$$

$$\exists\, n_1 \in N_1 \ : \ g_1(n_1) = n_2 - \beta(m_2)$$

$\Leftarrow$ α غامر نجد :

$$\exists\, m_1 \in M_1 \ : \ \alpha(m_1) = n_1$$

$$g_1(\alpha(m_1)) = n_2 - \beta(m_2) \quad \text{ومنه}$$

$$\beta(f_1(m_1)) = n_2 - \beta(m)$$

$$\beta(\underbrace{f_1(m_1) + m_2}_{\in M_2}) = n_2$$

ومنه β غامر

الطلب 2 :

$$m_3 \in \ker \gamma$$

$$\gamma(m_3) = 0 \quad , \quad g_3(\gamma(m_3)) = 0$$

تبادلي

$$\delta(f_3(m_3)) = 0 \quad , \quad f_3(m_3) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{f_3}\ m_3 \in \ker f_3 = \operatorname{Im} f_2$$

$$\exists\, m_2 \in M_2 \ , \ f_2(m_2) = m_3 \qquad (1)$$

$$\gamma(f_2(m_2)) = \gamma(m_3) = 0$$

$$g_2(\beta(m_2)) = 0$$

$$\beta(m_2) \in \ker g_2 = \operatorname{Im} g_1$$

$$\exists\, n_1 \in N_1 \ , \ g_1(n_1) = \beta(m_2)$$

α غامر وبالتالي :

$$\exists\, m_1 \in M_1 \ ; \ \alpha(m_1) = n_1$$

$$g_1(\alpha(m_1)) = \beta(m_2)$$

$$\beta(f_1(m_1)) = \beta(m_2)$$

β متباين :

$f(m_1) = m_2$

نعوض في العلاقة (1) :

$m_3 = f_2(m_2) = f_2(f_1(m_1))$

$m_3 = 0 \quad = f_2 \circ f_1(m_1)$

$= 0(m_1) \Rightarrow \ker \gamma_1 = 0$

نتيجة: متتالية مضبوطة

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

متتالية مضبوطة

كل منهم هي تشاكلات مودولية

((هو مخطط تبديلي من التشاكلات المودولية و الأسطر متتاليات تامة))

عندها: γ ، α تماثلين فإن β تماثل

لأن β غامر ، β متباين $\Leftarrow$ β تقابل

التشاكلات المتولدة من تشاكل مودولي:

ليكن $f: M \to N$ تشاكل مودولي

ولنأخذ: P مودول على نفس الحلقة المعرفة عليها N ، M

$$f_*: Hom(P, M) \to Hom(P, N)$$

$$u \mapsto f_*(u) = f \circ u$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "u"'] \arrow[dr] & \\
M \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

تشاكل f_* زمري

$$f^* : \mathrm{Hom}(N,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,P)$$
$$v \longrightarrow f^*(v) = v \circ f$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & N \arrow[d, "v"] \\ & P \end{tikzcd}$$

~~[illegible]~~ $\cancel{f^*}$.

f^* تشاكل زمري .

مبرهنة: $f, h \in \mathrm{Hom}(M,N)$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "h"'] & N \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "k"'] & P \end{tikzcd}$$

$g, k \in \mathrm{Hom}(N,P)$.

حيث M , N , P ثلاث مودولات على حلقة A

عندها:

(1. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$

(2. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(3 $(f+h)^* = f^* + h^*$

(4 $(g+k)_* = g_* + k_*$

البرهان:

اثبات (2) : ليكن Q مودول على الحلقة A

$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$; $g \circ f : M \to P$

$(g \circ f)^* : \mathrm{Hom}(P,Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,Q)$.

$u \longrightarrow (g \circ f)^*(u) = u \circ (g \circ f)$

$(g \circ f)_* : \mathrm{Hom}(Q,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Q,P)$.

$v \longrightarrow (g \circ f)_*(v) = \underline{(g \circ f) \circ v}$

$$f^*: \mathrm{Hom}(N, Q) \to \mathrm{Hom}(M, Q)$$
$$u \to u \circ f$$

$$f_*: \mathrm{Hom}(Q, M) \to \mathrm{Hom}(Q, N)$$
$$v \to f \circ v$$

$$g^*: \mathrm{Hom}(P, Q) \to \mathrm{Hom}(N, Q)$$
$$u \to u \circ g$$

$$g_*: \mathrm{Hom}(Q, N) \to \mathrm{Hom}(Q, P)$$
$$v \to g \circ v$$

$$(g \circ f)^*(u) \neq u \circ (g \circ f) = (u \circ g) \circ f$$
$$= (g^*(u)) \circ f = f^*(g^*(u)) = f^* \circ g^*(u)$$

الباقي ، واضحة.

2015/11/9

الموضوع: المحاضرة 9

مراجعة:

$$f : M \longrightarrow N$$

Q

$$f^* : \operatorname{Hom}_A(N, Q) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(M, Q)$$

$$u \longrightarrow f^*(u) = u \circ f$$

$$f_* : \operatorname{Hom}_A(Q, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(Q, N)$$

$$v \longrightarrow f_*(v) = f \circ v$$

مبرهنة: ليكن M, M', M'' 3 مودولات على حلقة A

ولتكن المتتالية التالية:

$$(*)\quad 0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

متتالية قصيرة تامة، عندها،

لنأخذ N مودول على حلقة A فإن المتتالية

$f^* : \operatorname{Hom}(M, N) \rightarrow \operatorname{Hom}(M', N)$

$g^* : \operatorname{Hom}(M'', N) \rightarrow \operatorname{Hom}(M, N)$

1) $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(N, M') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}(N, M'')$

2) $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(M', N)$

تامتين

الموضوع:

/ /

البرهان: لنبرهن أن (1) تام

أي يجب برهان f_* متباين و $\mathrm{Im} f_* = \ker g_*$

يبقى التفاصيل

$v \in \ker f_* \Rightarrow v \in \mathrm{Hom}(N, M')$

$: f_*(v) = 0$

$\Rightarrow v \in \mathrm{Hom}(N, M') : f \circ v = 0$

$\boxed{N \xrightarrow{v} M' \xrightarrow{f} M}$ إذن $f \circ v = 0$

$f \circ v = f \circ 0 \overset{?}{\Rightarrow} v = 0$ (لأن f متباين إذاً يمكن حذفها متباين)

نعوضها بـ M

لنحليل $\forall n \in N : f \circ v(n) = f \circ 0(n)$

$f(v(n)) = f(0(n)) \xrightarrow[\text{متباين}]{f} v(n) = 0(n) = 0 \Rightarrow v = 0$

$\forall n \in N$ $\qquad \forall n \in N$

ومنه $0 = \ker f_* \Leftarrow f_*$ متباين

[illegible]

[illegible] $\boxed{f \circ 0(n) = f(0) = 0}$

إثبات: $\mathrm{Im} f_* = \ker g_*$

$u \in \mathrm{Im} f_* \Leftarrow$

$u \in \mathrm{Hom}(N, M) \wedge \exists v \in \mathrm{Hom}(N, M') : f_*(v) = u$

$\Rightarrow u \in \mathrm{Hom}(N, M) \wedge \exists v \in \mathrm{Hom}(N, M') : f \circ v = u$

/ /

الموضوع: متتالية تامة

متتاليات وانطباع هو الشاكلة الصفر

$$g_*(u) = g\circ u = g\circ(f\circ v) = (g\circ f)\circ v$$

$0\circ v = 0$ لأن $(*)$ تامة

ومنه $u \in \ker g_*$

اثبات الاحتواء الثاني: ليكن $u \in \ker g_*$ والمطلوب برهان

$$\exists ?\, w \in Hom(N, M') : f_*(w) = u$$

$$: f\circ w = u$$

$$u \in \ker g_* \to u \in Hom(N, M) : g_*(u) = 0$$

$$\to u \in Hom(N,M) : g\circ u = 0$$

$$\to u \in Hom(N,M) : Im\, u \subseteq \ker g$$

$$: Im\, u \subseteq Im f$$

وذلك لأن $(*)$ تامة

فقط تبديل

بدي دور w

مثلا

يكون المخطط تبديلي

$$\begin{tikzcd} & M' \ni m' \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed] \\ N \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

$$n \to u(n) \in Im\, u \subseteq Im f$$

$\boxed{w(n) = m'}$

ومنه $Im f \ni u(n)$

ومنه

نأخذ عنصر $M' \ni m'$

بحيث صورته $f(m') = u(n)$

إثبات الايجابية خال m' وحيدة

$\boxed{\text{إنشاء } w}$

لنأخذ $n \in N$ ومنه $u(n) \in Im\, u \subseteq Im f$

$$\to \exists m' \in M' : f(m') = u(n)$$

نعرف $w : N \to M'$ حيث $w(n) = m'$ عندما

لنعرف العلاقة : $w : N \to M'$

$n \to m'$: $u(n) = f(m')$

• w تطبيق :

تعريف من النطاق

$n_1 = n_2 \Longrightarrow u(n_1) = u(n_2)$

$\Longrightarrow f(m'_1) = f(m'_2)$

$u(n_1) = f(m'_1)$

$u(n_2) = f(m'_2)$

f متباين

$\Longrightarrow m'_1 = m'_2 \longrightarrow w(n_1) = w(n_2)$

•• w تشاكل :

$\alpha, \beta \in A \quad , n_1, n_2 \in N$

$$w(\alpha n_1 + \beta n_2) = \lambda \in M'$$

$u(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha u(n_1) + \beta u(n_2)$ (u تشاكل)

$= \alpha f(m'_1) + \beta f(m'_2)$

$= f(\alpha m'_1 + \beta m'_2)$ (f تشاكل)

$w(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha m'_1 + \beta m'_2$

$= \alpha w(n_1) + \beta w(n_2)$

حيث: $u(n_1) = f(m'_1) \Rightarrow w(n_i) = m'_i$

$i = 1, 2.$

الموضوع: ....

إذاً $w \in Hom(N, M')$

إثبات أنه خطط شـ يلي:

$f^*(w) = u$

$f \circ w(n) = f(w(n)) = f(m')$ إذ

$\boxed{n \in N}$ $= u(n)$

2015/11/11   المحاضرة 10

مبرهنة: $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$

متتالية تامة عن ما لكل N مودول على A

2) $0 \to Hom(M'', N) \xrightarrow{g^*} Hom(M, N) \to$
$\xrightarrow{f^*} Hom(M', N)$

تامة:

البرهان: يجب برهان أن:
$\left.\begin{array}{l} g^* \text{ متباين} \\ Im\, g^* = \ker f^* \end{array}\right\}$

اثبات g^* متباين:

$v \in \ker g^* \to v \in Hom(M'', N) \wedge g^*(v) = 0$

$g^*(v) = 0 \to v \circ g = 0$
$\to v \circ g = 0 \circ g$

كون g غامر $\Leftarrow$ g يقبل الاختصار من اليمين لأن:

نفرض أنه من كون g غامر فإنه يوجد:

$$M \xrightarrow{g} M'' \qquad s : M'' \longrightarrow M$$

$$m'' \longrightarrow m$$

$$m'' \in M'' \xrightarrow{g \text{ غامر}} \exists\, m \in M : g(m) = m''$$

$$g \circ s(m'') = g(s(m'')) = g(m) = m'' = \underset{\text{تطبيق مطابق}}{id_{M''}(m'')}$$

ومنه $g \circ s = id_{M''}$

نتيجة مما سبق: g غامر $\Leftarrow$

∃s,e $\quad \exists\, s : M'' \longrightarrow M$

تطبيق حيث $g \circ s = id_{M''}$

لدينا:

$$v \circ g = 0 \circ g$$

$$(v \circ g) \circ s = (0 \circ g) \circ s$$

$v = 0$ (لأن $\circ$ تجميعي وكذا $g \circ s = id$)

ومنه $\ker g^* = 0$ إذاً g^* متباين

لنثبت أن $\operatorname{Im} g^* = \ker f^*$. ترتيب الصور للمبا...

$$v \in \operatorname{Im} g^* \longrightarrow v \in \operatorname{Hom}(M, N)$$

$$\wedge\ \exists\, u \in \operatorname{Hom}(M'', N) : g^*(u) = v$$

$$u \circ g = v$$

$$f^*(v) = v\circ f = (u\circ g)\circ f = u\circ (g\circ f)$$

$$\underset{\text{نتيجة}}{=} u\circ 0 = 0$$

ومنه $v \in \ker f^*$

وبالتالي $\mathrm{Im}\, g^* \subseteq \ker f^*$

ولنثبت الاحتواء الثاني:

$$u \in \ker f^* \to \begin{cases} u : M \xrightarrow{\text{تشاكل}} N \\ u\circ f = 0 \end{cases}$$

ولنثبت أن $u \in \mathrm{Im}\, g^*$ أي يجب برهان على وجود

$\exists\ w : M'' \xrightarrow[\text{تشاكل}]{} N$

$w\circ g = u$

$$\begin{tikzcd} m\in M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & N \\ m''\in M'' \arrow[ur, dashed, "\text{تشا}"'] & \end{tikzcd}$$

$u(m)$

بأخذ عنصر من M'' وليكن m''

وبما أن g غامر ومنه يوجد عنصر من M وليكن m حيث
$g(m) = m''$

أنا بدي أوصل لعنصر N

أقوم بتعويض العنصر m من خلال u

$m \to u(m)$

ومنه $w(m'') = u(m)$

حيث $g(m) = m''$

$w : M'' \to N$

$m'' \to w(m'') = u(m)$

حيث $g(m) = m''$

w تطبيق لأن:

$m''_1 = m''_2 \Rightarrow \exists\, m_i \in M$

$: g(m_i) = m''_i$

$i = 1, 2$

ومنه: $m''_1 = m''_2 \to g(m_1) = g(m_2)$

$\rightarrow m_1 - m_2 \in \ker g$

ولكن: $u \circ f = 0 \rightarrow \operatorname{Im} f \subseteq \ker u$

$\rightarrow \ker g \subseteq \ker u$

إذاً: $m_1 - m_2 \in \ker g \subseteq \ker u$

$\rightarrow u(m_1 - m_2) = 0 \rightarrow u(m_1) = u(m_2)$

$\rightarrow w(m_1'') = w(m_2'')$

الشاكل وظيفة. (بسيط جداً)

إذاً $w \in Hom(M'', N)$ ولنرهن معاً أن $g^*(w) = u$

يري أثبت المخطط تبديلي أي $w \circ g = u$

$$w \circ g(m) = w(g(m))$$
$$= u(m)$$

إذاً $\boxed{w \circ g = u}$

وظيفة: ليكن M, N, M', N' مودولات

كل حلقة A وليكن:

$f : M \rightarrow N$

$f' : M' \rightarrow N'$

تشاكلين مودوليين: نعرف العلاقة:

$$f \times f' : M \times M' \rightarrow N \times N'$$
$$(x, x') \rightarrow (f(x), f'(x))$$

إن $f' \times f$ تشاكل مودولي وظيفة.

[2]
$$0 \to M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

$$0 \to N \xrightarrow{f'} N' \xrightarrow{g'} N'' \to 0$$

متتاليتين تامتين من الشاكلات المودولية عندها:

$$0 \to M \times N \xrightarrow{f \times f'} M' \times N' \xrightarrow{g \times g'} M'' \times N'' \to 0$$

اثبات أنها متتالية تامة ولأصنفية.

الجداء و الجداء المباشر
$\oplus$ و π

الجداء الديكارتي: لنأخذ $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A

لنعرف المجموعة التالية:

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ (m_i) : m_i \in M_i \}$$

$$(m_i)_{i \in I} = (\dots, m_i, m_{i+1}, \dots)$$

لنزود $\prod_{i \in I} M_i$ بقانوني تشكيل:

$$(m_i)_{i \in I} + (m_i')_{i \in I} = (m_i + m_i')_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$$

وليكن $\lambda \in A$

$$\lambda . (m_i)_{i \in I} = (\lambda m_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$$

إن $(\prod_{i\in I} M_i , + , \cdot)$ مودول على A

تدعى الجداء الديكارتي

لأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

الاثبات وظيفة أنه مودول

المحاضرة 11 — 2015/11/16

- نعرف العلاقات الثنائية التالية:

$j \in I$

$$P_j^r : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

$$(m_i)_{i\in I} \longrightarrow m_j$$

العنصر الموجود في المركب j

$M_1 \times M_2 \to M_1$
$(x,y) \to x$
$M_1 \times M_2 \to M_2$
$(x,y) \to y$

إن P_j^r تشكل تشاكلات مودولية مهما يكن $j \in I$ وكذلك P_i^r غامر مهما يكن $i \in I$

يدعى P_j^r تابع الاسقاط القانوني على المركبة j (مهما يكن $j \in I$)

$$M_1 \times M_2 = \{(x,y) : x \in M_1 , y \in M_2\}$$

تابع الاسقاط على المركبة 1

$$P_1^r : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$$
$$(x,y) \longrightarrow x$$

$$P_2^r : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$$
$$(x,y) \longrightarrow y$$

الجداء: ليكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على حلقة A نقول أن الثنائية $(M, \{f_i\}_{i\in I})$ حيث M مودول على حلقة A، $\{f_i\}_{i\in I}$ أسرة من التشاكلات

$$f_i : M \to M_i$$

وذلك من أجل كل $i\in I$

إنها جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ إذا تحقق ما يلي:

لأجل كل $(N, \{g_i\}_{i\in I})$ حيث N مودول على A

و $g_i : N \to M_i$ تشاكلات مودولية لأجل كل $i\in I$

فإنه يوجد تشاكل وحيد

$$h : N \to M$$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g_i"] \\ M \arrow[r, "f_i"'] & M_i \end{tikzcd}$$

حيث $f_i \circ h = g_i \quad \forall i\in I$

مبرهنة: لتكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على A

إن $(\prod_{i\in I} M_i , \{p_i\}_{i\in I})$ تشكل جداء لـ

البرهان: ليكن $(N , \{f_i\}_{i\in I})$ حيث N هو A-مودول على A

و $f_i : N \to M_i$ تشاكل مودولي $\forall i\in I$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f_i"] \\ \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "p_i^r"'] & M_i \end{tikzcd}$$

لنعرف: $h : N \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$

$n \longrightarrow h(n) = (f_i(n))_{i\in I}$

$h(n) = (f_1(n), f_2(n), \dots)$

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d] \\ M_1\times M_2 \arrow[r] & M_i \end{tikzcd}$$

$h(n) = (f_1(n), f_2(n))$

إذن h تطبيق وضوحاً. } واضحة
h تشاكل وضوحاً.

... $p_i^r \circ h = f_i \ , \forall i \in I$

$$p_i^r \circ h(n) = p_i^r(h(n)) = p_i^r\left((f_i(n))_{i\in I}\right) = f_i(n) \ , \forall i\in I \quad \forall n \in N$$

h وحيد: ليكن: $k : N \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$

بحيث يحقق مهما يكن $i\in I$ فإن

$p_i^r \circ k = f_i$

مهما يكن $n \in N$:

$$f_i(n) = p_i^r \circ k(n) = p_i^r \circ h(n)$$

$$p_i^r(k(n)) = p_i^r(h(n)) \quad \forall i \in I$$

ومنه المركبة i للعنصر $k(n)$ تساوي المركبة i للعنصر $h(n)$ وذلك مهما يكن $i\in I$

إذاً $k(n) = h(n)$ مهما يكن $n \in N$

تمرين: ليكن $\{M_i\}_{i\in I}$ أسرة من المودولات على الحلقة A

عندها أي جداء لهذه الأسرة يماثل $(\prod_{i\in I} M_i , \{P_i^r\}_{i\in I})$

الحل: $(\prod_{i\in I} M_i , \{P_i^r\}_{i\in I})$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[d, "b_i"] \arrow[dl, bend right, "h \text{ وحيد}"'] \\
\prod M_i \arrow[r, "P_i^r"'] \arrow[ur, "k"] & M_i
\end{tikzcd}
$$

$h\circ k = 1$

$k\circ h = 1$ } اثبات $\Rightarrow$ $\cancel{\exists h: N \to \prod_{i\in I} M_i}$

لنفرض وجود جداء آخر $(N, \{b_i\})$ للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ عندئذ.

$(\prod_{i\in I} M_i , \{P_i^r\}_{i\in I})$ جداء للأسرة $\{M_i\}_{i\in I}$ $\Rightarrow \exists h : N \to \prod_{i\in I} M_i$

حيث $\forall i\in I \quad P_i^r\circ h = b_i$

بما أن $(N, \{b_i\})$ جداء لـ $\{M_i\}_{i\in I}$ فإنه $\exists k : \prod M_i \to N$ وحيد

حيث $\forall i\in I, \ b_i\circ k = P_i^r$ ولنثبت أن $h\circ k = k\circ h = 1$ التطبيق المطابق

$$\forall i\in I : \ b_i = P_i^r\circ h$$
$$= (b_i\circ k)\circ h$$
$$b_i = b_i\circ(k\circ h) \ , \ k\circ h \text{ وحيد}$$
لكن $b_i = b_i\circ 1$

إذاً $k\circ h = 1$

الموضوع: .... / /

من جهة أخرى لدينا .. $\forall i \in I$

يكون $h \circ x = 1$ وهو المطلوب