

برهنة: $f: M \rightarrow N$ تماثل

M مودول جزئي من M

N " " " " N

1) $f^{-1}(f(M_1)) = M_1 + \ker f$ عند ها :

2) $f(f^{-1}(M_1)) = M_1 \cap \text{Im } f$

1) $\ker f \subseteq M_1 \Leftrightarrow f^{-1}(f(M_1)) = M_1$ نتیجه :

2) $M_1 \subseteq \text{Im } f \Leftrightarrow f(f^{-1}(M_1)) = M_1$

ملاحظة: $f: M \rightarrow N$ تماثل كل مودولي

1) $f(0_M) = 0_N$ عند ها :

2) $\forall x \in M, f(-x) = -f(x)$

3) $\ker f = 0 \Leftrightarrow f$ تماثل متباين

4) $\text{Im } f = N \Leftrightarrow f$ تماثل قاصر

امثلة عند التماثلات:

1- G_1, G_2 زميرتين بتدليلين، عند ها أي تماثل زميري

$f: G_1 \rightarrow G_2$

هو تماثل كل مودولي

$f(\alpha g_1) = \alpha \cdot f(g_1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}, g_1 \in G_1$

حساباتون التجميعي (في المبرهن 1.1.1) : $0 < \alpha$ و α متكرر

$$f(\alpha \cdot g_1) = f(\underbrace{g_1 + \dots + g_1}_{\alpha \text{ مرة}}) = \underbrace{f(g_1) + \dots + f(g_1)}_{\alpha \text{ مرات}} = \alpha \cdot f(g_1)$$

البرهان: في حالة $0 = \alpha$ و $0 > \alpha$ (المبرهن 1.1.1)

مثال 2: ليكن M مودول على حلقة A والحلقة A تبديلية وليكن $a \in A$

$$f: M \rightarrow M$$

$$m \rightarrow a \cdot m$$

كندا f متأكد مودول كإثبات وخصيعة.

مثال 3: ليكن M مودول على حلقة A ولتعرف:

$$M^n = \{ (m_1, \dots, m_n) \mid m_i \in M, i = 1, \dots, n \}$$

تعرف على M^n القانوني: (قانون تشكيل داخلي)

$$(m_1, \dots, m_n) + (m'_1, \dots, m'_n) = (m_1 + m'_1, \dots, m_n + m'_n) \in M^n$$

(قانون تجميعي) $\lambda \in A, (m_1, \dots, m_n) \in M^n$

$$\lambda \cdot (m_1, \dots, m_n) = (\underbrace{\lambda m_1}_{\in M}, \dots, \underbrace{\lambda m_n}_{\in M}) \in M^n$$

وخصيعة اثبات M^n هو A مودول

$$P_{\sigma}^r : M^n \rightarrow M$$

مقاطعة كل مركبة σ على المركبة σ وهو متعاقد خاص
 $(m_1, \dots, m_n) \rightarrow m_{\sigma}$
 حيث $\sigma \in \{1, \dots, n\}$

$$P_{\sigma}^r (1) : M \times N \rightarrow M$$

مقاطعة على المركبة الأولى (أي من خارج المركبة الأولى)
 $(x, y) \rightarrow x$
 $(a, 0) \rightarrow a$

$$(2) : M \times N \rightarrow N$$

مقاطعة المركبة الثانية
 $(x, y) \rightarrow y$
 $(0, n) \rightarrow n$

الطلوب اثبات انه متعاقد

كذلك من أجل $\sigma \in \{1, \dots, n\}$ يمكن تعريفه:

$$E_1 : M \rightarrow M^n$$

$$m \rightarrow (m, 0, \dots, 0)$$

$$E_{\sigma} : M \rightarrow M^n$$

$$m \rightarrow (0, \dots, m, \dots, 0)$$

في المرتبة σ

تعاقد هو دويري ومتعاقد

(الاصواء القا تونني ، التباين القا تونني)

مودول المتساوية:

M مودول A وليكن N مودول جزئي من M عندها:

نعرف علاقة ثنائية R على M كما يلي

$$x R y \iff x - y \in N$$

$$\iff x \equiv y \pmod{N}$$

$$x, y \in M$$

لان R علاقة تكافؤ

(انعكاسية ، تناظرية ، متقدمة)

نأخذ مجموعة صفوف الكمانو ، شكل المجموعة التالية:

$$M/N = \frac{M}{N} = \{ m + N \mid m \in M \}$$

سوف نعرف قانون تجميع داخلي وفاربي على مجموعة صفوف الكمانو:

لنقرن: (+) : ليكن $m_1 + N$ و $m_2 + N$

(كنا هر كمنية من M/N) وليكن $\lambda \in A$ عندها

$$.) \quad (m_1 + N) + (m_2 + N) = \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\in M} + N \in \frac{M}{N}$$

$$..) \quad \lambda (m_1 + N) = \underbrace{\lambda m_1}_{\in M} + N \in \frac{M}{N}$$

عندها $(M/N, +, \cdot)$ مودول على A

اثبات اننا مودول (نأ):

لان $(M/N, +)$ هي زمرة تبديلية لانها:

1 - صياري هو N

$$(m + N) + (0 + N) = (m + 0) + N = m + N$$

2 - النظرية

$$(m + N) + (-m + N) = (m + (-m)) + N = 0 + N = N$$

3 - تجيب وأصية

4 - تبين في وضعية

كذلك

$$1) \quad 1 \cdot (m + N) = 1 \cdot m + N = m + N$$

$$2) \quad \alpha \cdot ([m_1 + N] + [m_2 + N]) = \alpha [(m_1 + m_2) + N]$$

حسب قانون جمع أيدي مرتين

$$= \alpha (m_1 + m_2) + N$$

حسب قانون التوزيع الخارجي

$$= (\alpha m_1 + \alpha m_2) + N = (\alpha m_1 + N) + (\alpha m_2 + N)$$

$$= \alpha \cdot (m_1 + N) + \alpha (m_2 + N)$$

حسب قانون التوزيع
العدد N يتبع m/N

$$3) \quad (\alpha + \beta) \cdot (m + N) = (\alpha + \beta)m + N$$

حسب قانون التوزيع الخارجي

$$= (\alpha m + \beta m) + N = (\alpha m + N) + (\beta m + N)$$

حسب الجمع المبرهن

$$= \alpha \cdot (m + N) + \beta (m + N) = \alpha \cdot (\beta \cdot (m + N))$$

حسب قانون الضرب

$$= \alpha \cdot [\beta m + N] = \alpha \cdot (\beta m) + N = (\alpha \cdot \beta) \cdot m + N$$

← حسب قانون التوزيع الثاني

وهذه M/N مودول N الممتدة

مثال: ليكن M مودول على حلقة A ، وليكن N مودول جزئي من M عندها يوجد تماثل القسمة القانوني

$$\pi : M \rightarrow M/N$$

$$m \rightarrow m + N$$

(تماثل مودولي + تماثل)

~~النتيجة~~

مبرهنة: ليكن M مودول على A و N مودول جزئي من M عندها يوجد ~~تماثل~~ تماثل f

$$f: \left\{ \begin{array}{l} \text{المودولات الجزئية } P \\ \text{من } M \text{ التي تحتوي } N \\ N \subseteq P \subseteq M \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{تقابل}} \left\{ \begin{array}{l} \text{المودولات الجزئية} \\ M/N \end{array} \right\}$$

$$P \rightarrow P/N$$

(1) يجب إثبات أن P/N مودول M/N

(2) الخطوة الثانية إثبات العلاقة \hookrightarrow أن تماثل

البرهان: 1 - من أجل $N \subset P \subset M$ حيث P مودول جزئي من M فإن P/N مودول جزئي من M/N

$$0 + N \in P/N$$

ان $\emptyset \neq P/N$ لان

ليكن $\alpha, \beta \in A$

$$\frac{P}{N} \text{ عناصره هي } (P_1 + N), (P_2 + N)$$

وبنه

عناصره تتشكل الكاديم

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot (P_1 + N) + \beta (P_2 + N) \\ &= (\alpha P_1 + N) + (\beta P_2 + N) = (\underbrace{\alpha P_1 + \beta P_2}_{\in P}) + N \end{aligned}$$

$$\in P/N$$

وبنه

(c) اثبات ϕ نظمت واضح

ϕ متباين لان:

$$P_1/N = P_2/N$$

حيث P_1 و P_2 مودولات جزئية من M تحتوي N

ولنرهد ان $P_1 = P_2$

$$y_1 \in P_1 \implies y_1 + N \in P_1/N = P_2/N$$

$$\implies y_1 + N \in P_2/N$$

$$\implies \exists y_2 \in P_2 : y_1 + N = y_2 + N$$

$$\implies \cancel{y_1} \in \cancel{y_2} + N \subset P_2 \quad y_1 \in y_2 + N$$

$$\implies y_1 = y_2 + n \quad n \in N$$

$$\implies y_1 - y_2 \in N \subset P_2$$

$$\implies y_1 - y_2 \in P_2 \implies y_1 - y_2 = \alpha : \alpha \in P_2$$

$$\implies y_1 = \underbrace{y_2}_{\in P_2} + \underbrace{\alpha}_{\in P_2} \in P_2$$

ومنه $P_1 \subseteq P_2$ ويتبين كما لو لم نجد $P_2 \subseteq P_1$ ومنه
 نجد $P_1 = P_2$

f خاصر : ليكن \mathcal{Q} مودول جزئي من M/N ولنفرض المجموعة

$$U = \{x \in M : x + N \in \mathcal{Q}\}$$

اثبات أن:

$$(أ) \quad f(U) = \mathcal{Q} \quad (ب) \quad U \text{ منطقة}$$

(أ) U مودول جزئي من M فهو $N \subseteq U$

$$U \neq \emptyset \quad \text{لأن} \quad N \in \mathcal{Q}$$

ليكن $x, y \in U$ و $\alpha, \beta \in A$ عناصر حقيقيين دللنا أن:

$$(\alpha x + \beta y) + N \in \mathcal{Q}$$

$$(\alpha x + \beta y) + N = \alpha \underbrace{(x + N)}_{\in \mathcal{Q}} + \beta \underbrace{(y + N)}_{\in \mathcal{Q}} \in \mathcal{Q}$$

$$\alpha x + \beta y \in U$$

U هو عنصر من المناطق

$$(ب) \quad \text{لنثبت} \quad f(U) = \mathcal{Q}$$

$$f(U) = \{u + N : u \in U\}$$

$$= \{u + N \in \mathcal{Q}\} = \mathcal{Q}$$

عند التعريف

صراحة: حدود القسمة

$$\frac{M}{N} = \{ x + N \mid x \in M \}$$

$$\lambda \in A, x + N \in \frac{M}{N}$$

$$\lambda \cdot (x + N) = \lambda x + N$$

$\pi: M \rightarrow M/N$ تناكد موردي

$$m \rightarrow m + N$$

تناكد موردي + غامر

$$\ker \pi = N$$

$$\ker \pi = \{ m \in M : m + N = N \}$$

$$= \{ m \in M : m \in N \} = N$$

المودولات الجزئية $\xleftrightarrow{\text{تقابل (1-1)}}$ المودولات الجزئية
 في M التي تحتوي N \leftrightarrow في M/N

~~مبرهنات~~ مبرهنات + نتيجة في نظرية المودولات

مبرهنة: ليكن M و N مودولات على حلقة A ولناخذ

$$f: M \rightarrow N$$

تناكد موردي

لنفرز P مودول جزئي من M بحيث $P \subseteq \ker f$ عند π
 يوجد تناكد

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \pi \downarrow & \nearrow & \\ M/P & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

$$\hat{f}: M/P \rightarrow N$$

وهي حيث تحقق الشرط التالية.

$$\tilde{f} \circ \pi = f \quad (1)$$

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P} \quad (2)$$

$$\text{Im } \tilde{f} = \text{Im } f \quad (3)$$

ker f
M/P
N

إبرهان: لنأخذ العنصر $m \in M$
 $\tilde{f} : \frac{M}{P} \rightarrow N$
 $m+P \rightarrow f(m) = \tilde{f}(m+P)$

إن \tilde{f} المتعرف سابقاً هو تطبيق لأن:

$$m_1 + P = m_2 + P$$

$$\rightarrow m_1 - m_2 \in P \subset \ker f$$

فإن $f(m_1 - m_2) = 0$
أي $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow \tilde{f}(m_1 + P) = \tilde{f}(m_2 + P)$

فإن \tilde{f} تطبيق لأن:

الخطوة الأولى
الخطوة الثانية

$$\begin{aligned} & \tilde{f} [(m_1 + P) + (m_2 + P)] \\ &= \tilde{f} ((m_1 + m_2) + P) = f(m_1 + m_2) \\ &= f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \\ &= \tilde{f}(m_1 + P) + \tilde{f}(m_2 + P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tilde{f} (\lambda \cdot (m_1 + P)) = \tilde{f} (\lambda m_1 + P) \\ &= f(\lambda m_1) = \lambda \cdot f(m_1) = \lambda \cdot \tilde{f}(m_1 + P) \end{aligned}$$

$$f: M \rightarrow N$$

$$\ker f = \{r \in M : f(r) = 0\} \quad , \quad \text{Im } f = \{f(r) \in N : r \in M\}$$

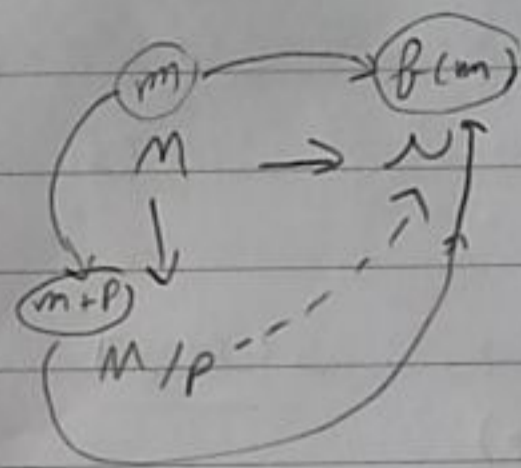
1 1

الموضوع:

نريد أن نرى كيف يتصرف $m_2 + p$ و $m_1 + p$ تحت f و $\lambda \in A$ \Rightarrow $f(\lambda m)$

$$\tilde{f} \circ \pi(m) = \tilde{f}(m+p) \quad (1)$$

$$\forall m \in M \quad = f(m)$$



شبه كدغرتا نوي

$$\tilde{f} \circ \pi = f \quad \text{إذ } \tilde{f}$$

$$\ker \tilde{f} = \{m+p \in \frac{M}{P} : \tilde{f}(m+p) = 0\} \quad (2)$$

$$= \{m+p \in \frac{M}{P} : f(m) = 0\}$$

$$= \{m+p \in \frac{M}{P} : m \in \ker f\}$$

$$= \ker f / P$$

$$\text{Im } \tilde{f} = \text{Im } f \quad (3)$$

$$\text{Im } \tilde{f} = \{ \tilde{f}(m+p) \in N : m+p \in M/P \}$$

$$= \{ f(m) : m \in M \} = \text{Im } f$$

$$\boxed{P = \ker f} \quad \text{حالة خاصة (نتيجة 1)}$$

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{P}$$

حسب الشرط (2)

$$\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{\ker f} = \{0 + h \mid h \in \ker f\}$$

$$\Rightarrow \ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{\ker f} = \{0\}$$

$$\ker f = \ker f = 0$$

وهذا يثبت كون \tilde{f} متبايناً

كان في العبارة السابقة f متبايناً $\Leftrightarrow \ker f = 0$

$$\tilde{f} : \frac{M}{\ker f} \rightarrow N$$

$$\tilde{f} : \frac{M}{\ker f} \rightarrow \text{Im } \tilde{f} \quad \text{إذاً}$$

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & N \\ \downarrow & \nearrow & \\ M/P & \xrightarrow{\tilde{f}} & \end{array}$$

$$\frac{M}{\ker f} \cong \text{Im } \tilde{f}$$

أي

$$\boxed{\frac{M}{\ker f} \cong \text{Im } f}$$

وهذا

$$f : M \rightarrow N \quad \text{متبايناً}$$

نتيجة

عندها:

$$\boxed{M / \ker f \cong \text{Im } f}$$

حالة خاصة إذا كان

$$M / \ker f \cong N \quad \text{ف } f \text{ تمام عند ها}$$

نتيجة (2): ليكن M مودول كد حلقة A

وليكن N_1 و N_2 مودولين جزئيين من M بحيث

$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2}$$

$$\boxed{N_1 \subseteq N_2} \quad \text{عندها}$$

البرهان: لدينا

$$f: M \rightarrow \frac{M}{N_2}$$

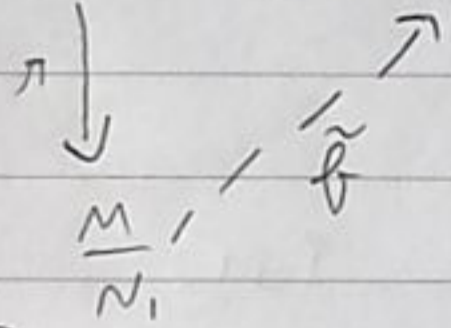
$$m \rightarrow m + N_2$$

دائماً ما نجد اتحاد التكد
يكون اتحاد + فامر
ونواته تارة للقام

شاكدا
الفر القانوسى

هواتا كدا الفر القانوسى (شاكدا + فامر)

$$M \xrightarrow{f} M/N_2 \quad \text{و نواته} \quad \ker f = N_2$$



وان $N_1 \subseteq N_2$ نجد المبركنة \star
يوجد شاكدا:

$$\tilde{f}: \frac{M}{N_1} \rightarrow \frac{M}{N_2}$$

$$m + N_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{f}(m + N_1) \stackrel{\text{نواته}}{=} f(m) = m + N_2$$

كذلك: $\ker \tilde{f} = \frac{\ker f}{N_1} = \frac{N_2}{N_1}$

ومن كون f فامر نجد ان \tilde{f} فامر

$$\tilde{f}: \frac{M}{N_1} \rightarrow \frac{M}{N_2}$$

فامر $\text{Im } \tilde{f} = \frac{M}{N_2}$ ان $m + N_1 \rightarrow m + N_2$

$$\ker \tilde{f} = \frac{N_2}{N_1}$$

المحاذاة الخانة
شاكدا فامر \Leftrightarrow
المستقر = $\text{Im } f$

صه التبيه (1)

$$\frac{M/N_1}{\ker \tilde{f}} \cong \text{Im } \tilde{f}$$

$$\frac{M/N_1}{N_2/N_1} \cong \frac{M}{N_2} \quad \text{أي}$$

2015 11/4

المحاورة 7

النتيجة (3): ليكن M مودول على حلقة A وليكن N_1 و N_2

مودولين جزئيين من M عند ها .

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

((f_2 هو تماثل))

البرهان: تماثل فرقتان

الفرقتان

$$N_2 \xrightarrow{f_1} N_1 + N_2 \xrightarrow{f_2} \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

وان N_1 هو مودول جزئي من $N_1 + N_2$ لأن $N_1 \subseteq M$

$$n_2 \rightarrow 0 + n_2$$

$$n_1 + n_2 \rightarrow n_1 + n_2 + N_1$$

لأن $N_1 \subseteq M$

$$N_1 \subseteq N_1 + N_2$$

عند ها يوجد تماثل

$$f: N_2 \rightarrow \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

$$n_2 \rightarrow n_2 + N_1 \rightarrow n_2 + n_1 + N_1 \rightarrow n_1 \in N_1 \quad \boxed{n_2 + N_1}$$

النتيجة من تركيب f_2 مع f_1

$$\ker f = \{ n_2 \in N_2 : n_2 + N_1 = N_1 \}$$

$$= \{ n_2 \in N_2 : n_2 \in N_1 \}$$

$$= N_1 \cap N_2$$

البيانات انه خاصر:

$$n_1 + n_2 + N_1 \in \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

f خاصر لان:

$$\rightarrow n_1 + n_2 + N_1 = n_2 + N_1 \rightarrow \exists n_2 \in N_2:$$

$$f(n_2) = n_2 + N_1 = n_1 + n_2 + N_1$$

$$\rightarrow \text{خاصر } f \rightarrow \frac{N_2}{\ker f} \cong \frac{N_1 + N_2}{N_1} \rightarrow \frac{N_2}{N_1 \cap N_2} \cong \frac{N_1 + N_2}{N_1}$$

(فينا نأخذ برهان الكتاب فينا حاشية من صفحتنا)

نتيجة 4: ليكن M مودول على حلقة A ولناخذ N, N', P, P'
 أربعة مودولات جزئية من M حيث
 $N \subset P, N' \subset P'$

عندها:

$$\frac{N + (P \cap P')}{N + (P \cap N')} \cong \frac{P \cap P'}{N \cap P'} \cong \frac{N' + (P \cap P')}{N' + (N \cap P')}$$

$$N_2 = P \cap P'$$

$$N_1 = N + (P \cap N')$$

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}$$

البرهان

بالتالي (3):

$$\frac{P \cap P'}{(P \cap P') \cap (N + (P \cap N'))} \cong \frac{(P \cap P') + (N + (P \cap N'))}{N + (P \cap N')}$$

$$N_1 + N_2 = \underbrace{(P \cap P')} + \underbrace{(N + (P \cap N'))} \quad \text{لدينا:}$$

$$= (P \cap P') + N$$

$$N' \subset P'$$

$$N' \cap P \subset P' \cap P$$

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C \quad \text{بشرط } C \subset A$$

$$N_1 \cap N_2 = \underbrace{(P \cap P')}_A \cap \underbrace{(N + (P \cap N'))}_B =$$

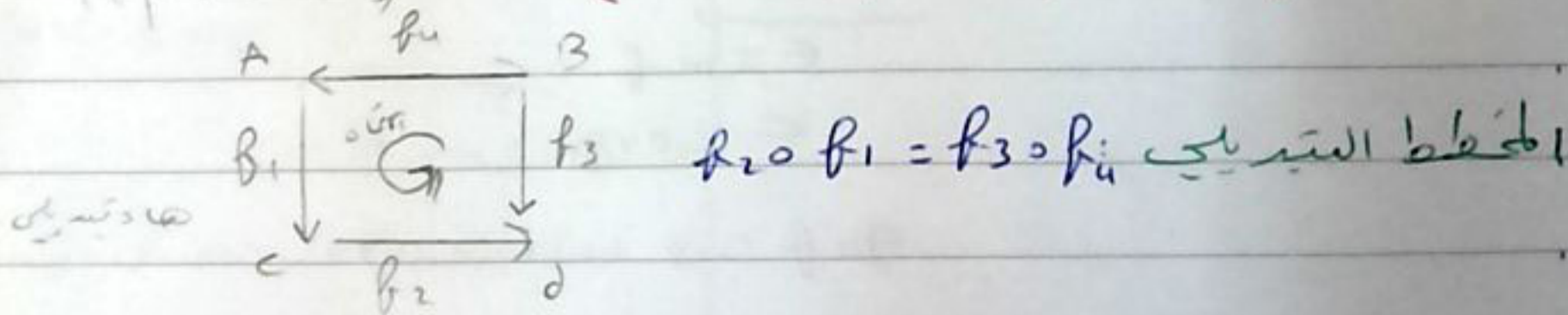
$$N' \subset P' \Rightarrow N' \cap P \subset P' \cap P$$

$$= ((P \cap P') \cap N) + (P \cap N')$$

$$\downarrow N \subset P \quad = (N \cap P') + (P \cap N')$$

القائد الثاني وظيفية (عند نفس القطر)

(المتتاليات التامة) (تحت قسم)



تعريف: لنفك: $\{ f_i : M_i \rightarrow M_{i+1} \}$ من المتتاليات المودولية $i \in I$

عند هذا
 * $\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots$
 المسألة * تكون تامة عند الحد M_i إذا تحقت ما يلي:

$$\text{Im } f_{i-1} = \ker f_i$$

ويقول عن * التامة \iff تامة عند كل حد M_i $\forall i \in I$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

الملاحظة: 1

حيث f و g تماثلات - فودولته عند هذا

$$\boxed{\text{Im } f \subseteq \ker g} \iff \boxed{g \circ f = 0}$$

لأن: \leftarrow

$$n \in \text{Im } f \rightarrow \exists m \in M : f(m) = n$$

$$g(n) = g(f(m)) = g \circ f(m) = 0$$

إذاً $n \in \ker g$

\implies ليكن $m \in M$ عند هذا

$$g \circ f(m) = g(f(m)) = 0$$

$\in \text{Im } f$

$\subseteq \ker g$

وهذا $g \circ f = 0$

$$f_i \circ f_{i-1} = 0 \iff (*) \text{ تامة } [2]$$

إذا كانت * تامة فيكون $Im f_{i-1} = ker b_i$

وهو $Im f_{i-1} \subseteq ker b_i$

$\forall i \in I$

وهو $b_i \circ f_{i-1} = 0$

المتتالية القصيرة: $0 \xrightarrow{(1)} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \xrightarrow{(2)} 0$
 هي متتالية قصيرة (بالتساكلات الوردولية)

تمرين: المتتالية القصيرة (***) تامة إذا وصفتها إذا:

(1) f تامة

(2) $Im f = ker g$

(3) g غامر

$\left. \begin{array}{l} \text{تامة عند } M \\ \text{تامة عند } N \\ \text{تامة عند } P \end{array} \right\}$

البيانات: (***) تامة \Leftrightarrow

$0 = ker f \Leftrightarrow Im(1) = ker f$
 f متباين \Leftrightarrow

$Im f = ker g$

$Im g = P \Leftrightarrow Im g = ker(2)$

g غامر \Leftrightarrow

\Leftrightarrow

$$0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \rightarrow 0 \quad (1) \quad \text{وظائف:}$$

$$a \rightarrow a$$

متجانسة

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}$$

إثبات التامة

(2) ليكن H و G زميرتين تبدليتين وليكن

$$f: H \rightarrow G \quad \text{شاكله زميري}$$

عندما يوجد متساويتين تامتين:

$$0 \rightarrow \ker f \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} \frac{H}{\ker f} \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$a \rightarrow a$$

نواة π هي $\ker f$

$$\ker f = \text{Im}(i)$$

الإثبات التامة صغيرة.

$$0 \rightarrow \text{Im} f \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} \frac{G}{\text{Im} f} \rightarrow 0 \quad (4)$$

الإثبات التامة صغيرة

$$M \xrightarrow{f} N \quad (3)$$

$$0 \rightarrow ? \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow ?? \rightarrow 0$$

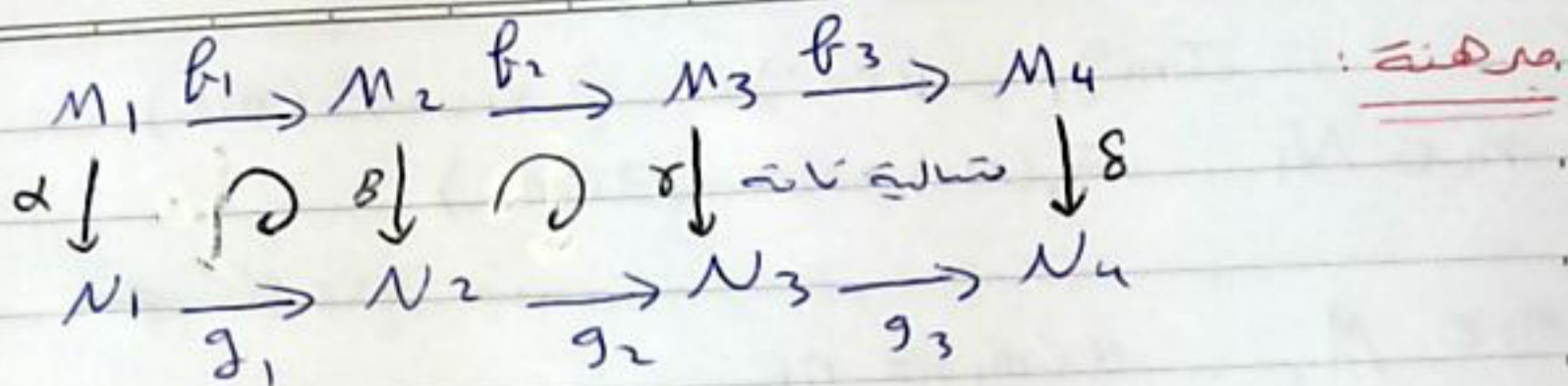
↓
إضافة وظيفية

↓
إحارة
وظيفية

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \rightarrow 2n$$

نظيفة من أجل



مبرهنة:

عندها: (1) (α, β) غامرين و δ متبايناً

عندها β غامر (إغامتيف) أي كان منحرفين المتفر

فيوجد علاقة المنطق حيث صورة المنطق تادد المنطق

(2) (β, δ) متباين α غامر \leftarrow متباين

البرهان: ليكن $n_2 \in N_2$ ومنه $g_2(n_2) \in N_3$ ولدينا لا غامر \leftarrow

$$\exists m_3 \in M_3 : \delta(m_3) = g_2(n_2)$$

لنأخذ صورة δ من M_3 ونفت g_3 :

$$g_3(\delta(m_3)) = g_3(g_2(n_2)) = g_3 \circ g_2(n_2)$$

تأكد من

لأنه متباين

$$g_3 \circ \delta(m_3) = 0, \quad \delta \circ f_3(m_3) = 0$$

$$\delta(f_3(m_3)) = 0$$

$\ker \delta \ni f_3(m_3)$ ومنه كون

$$f_3(m_3) = 0 \iff \delta \text{ متبايناً}$$

$$m_3 \in \ker f_3 = \text{Im } f_2$$

كون التسليقة تامة

$$\exists m_2 \in M_2 : f_2(m_2) = m_3$$

ومنه:

$$g_2(n_2) = \delta(m_3) = \delta(f_2(m_2)) = g_2(\beta(m_2))$$

$$g_2(n_2 - \beta(m_2)) = 0$$

$$\text{Im } g_1 = \ker g_2 \Rightarrow n_2 - B(m_2)$$

$$\exists n_1 \in N_1 : g_1(n_1) = n_2 - B(m_2)$$

← α غامر خبز :

$$\exists m_1 \in M_1 : \alpha(m_1) = n_1$$

$$g_1(\alpha(m_1)) = n_2 - B(m_2) \text{ ومنه}$$

$$B(f_1(m_1)) = n_2 - B(m_2)$$

$$B(\underbrace{f_1(m_1) + m_2}_{\in M_2}) = n_2$$

ومنه B غامر .

$$m_3 \in \ker \delta$$

الطلب 2 :

$$\delta(m_3) = 0 \text{ , } g_3(\delta(m_3)) = 0$$

$$\delta(f_3(m_3)) = 0 \text{ , } f_3(m_3) = 0$$

$$\Rightarrow m_3 \in \ker f_3 = \text{Im } f_2$$

$$\exists m_2 \in M_2 , f_2(m_2) = m_3 \quad (1)$$

$$\delta(f_2(m_2)) = \delta(m_3) = 0$$

$$g_2(B(m_2)) = 0$$

$$B(m_2) \in \ker g_2 = \text{Im } g_1$$

$$\exists n_1 \in N_1 , g_1(n_1) = B(m_2)$$

α غامر وبالتالي :

$$\exists m_1 \in M_1 ; \alpha(m_1) = n_1$$

$$g_1(\alpha(m_1)) = B(m_2)$$

$$B(f_1(m_1)) = B(m_2)$$

B متباينة :

$$f(m_1) = m_2$$

لتوجد في العلاقة (1):

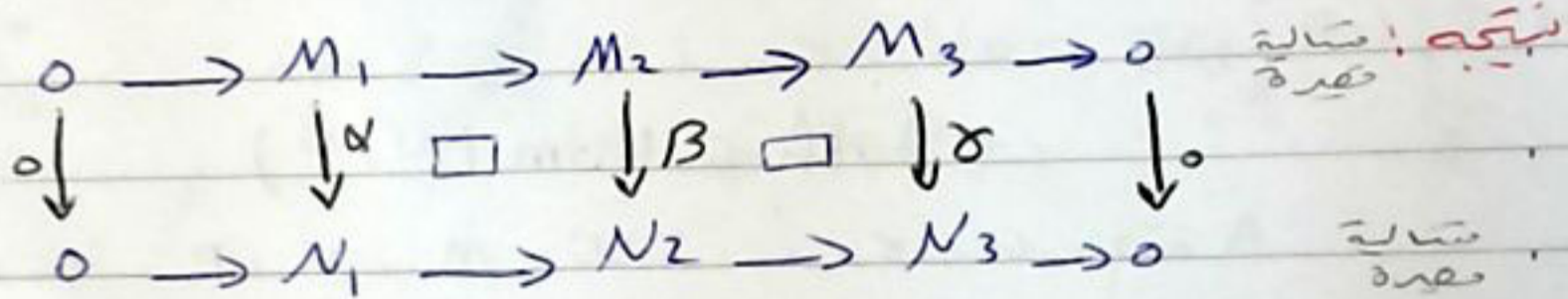
$$m_3 = f_2(m_2) = f_2(f_1(m_1))$$

$$m_3 = 0 = f_2 \circ f_1(m_1)$$

$$= 0(m_1) \Rightarrow \ker \gamma = 0$$

إثبات

□



كذلك هم هي تشاكلات مودولية

((هو مخطط متساوية بين التشاكلات المودولية و الاخر متساويات

تامة))

عند ها: كار α تماثلين فان β تماثل

لان β عام β سبائين $\beta \leftarrow \beta$ تقابل

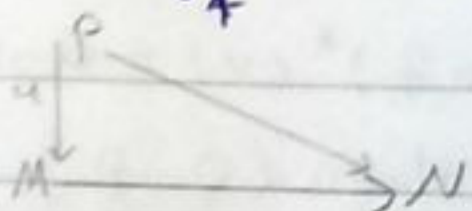
التشاكلات المتصلة بتشاكل مودولي:

ليكن $f: M \rightarrow N$ تشاكل مودولي

ولناخذ: P مودول على نفس الحلقة المعروفة كلياً M, N

$$f_*: \text{Hom}(P, M) \rightarrow \text{Hom}(P, N)$$

$$u \rightarrow f_*(u) = f \circ u$$



f_* تشاكل

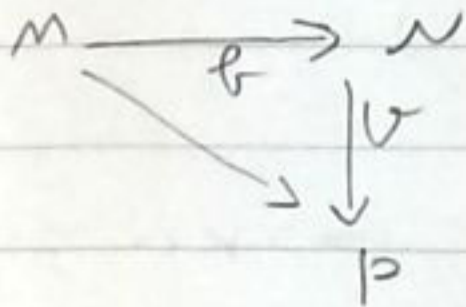
زكري

$$f^* : \text{Hom}(N, P) \rightarrow \text{Hom}(M, P)$$

$$u \rightarrow f^*(u) = u \circ f$$

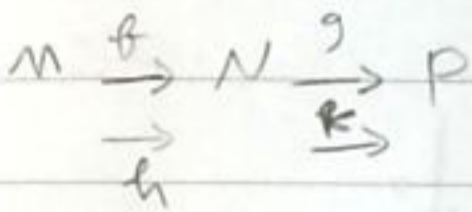
~~في~~

f^* تناكد زمري



$$f, h \in \text{Hom}(M, N)$$

ملاحظة:



$$g, k \in \text{Hom}(N, P)$$

جميع M, N, P تكون موجودات في حلقة A

كدها:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad (1)$$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad (2)$$

$$(f + h)^* = f^* + h^* \quad (3)$$

$$(g + k)_* = g_* + k_* \quad (4)$$

البرهان:

الم (2): ليكن Q موجود في الحلقة A

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \quad ; \quad g \circ f : M \rightarrow P$$

$$(g \circ f)^* : \text{Hom}(P, Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q)$$

$$u \rightarrow (g \circ f)^*(u) = u \circ (g \circ f)$$

$$(g \circ f)_* : \text{Hom}(Q, M) \rightarrow \text{Hom}(Q, P)$$

$$v \rightarrow (g \circ f)_*(v) = (g \circ f) \circ v$$

$$f^*: \text{Hom}(N, Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q)$$

$$u \rightarrow u \circ f$$

$$f_*: \text{Hom}(Q, M) \rightarrow \text{Hom}(Q, N)$$

$$v \rightarrow f \circ v$$

$$g^*: \text{Hom}(P, Q) \rightarrow \text{Hom}(N, Q)$$

$$u \rightarrow u \circ g$$

$$g_*: \text{Hom}(Q, N) \rightarrow \text{Hom}(Q, P)$$

$$v \rightarrow g \circ v$$

$$(g \circ f)^*(u) = u \circ (g \circ f) = (u \circ g) \circ f$$

$$= (g^*(u)) \circ f = f^*(g^*(u)) = f^* \circ g^*(u)$$

الباقي دلائل.

$$f: M \rightarrow N$$

مراجعة:

$$f^*: \text{Hom}_A(N, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Q)$$

$$u \rightarrow f^*(u) = u \circ f$$

$$f_*: \text{Hom}_A(Q, M) \rightarrow \text{Hom}_A(Q, N)$$

$$v \rightarrow f_*(v) = f \circ v$$

مبرهنة: ليكن M, M', M'' 3 مودولات على حلقة A

ولتكن المتتالية التالية:

$$(*) \quad 0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

متتالية قصيرة تامة، عندها،

$$f^*: \text{Hom}(M, N) \rightarrow \text{Hom}(M', N)$$

$$g^*: \text{Hom}(M'', N) \rightarrow \text{Hom}(M, N)$$

لأننا نأخذ N مودول على

حلقة A فإن المتتالية

$$1) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(N, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(N, M'')$$

$$2) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(M', N)$$

تامة

البرهان: لبرهن أن (1) تام

أي يجب برهان f_* متباينة و $\text{Im } f_* = \ker g_*$

بعض النقاط

$$v \in \ker f_* \rightarrow v \in \text{Hom}(N, M')$$

$$: f_*(v) = 0$$

$$\Rightarrow v \in \text{Hom}(N, M') : f \circ v = 0$$

$$N \xrightarrow{v} M' \xrightarrow{f} M \quad f \circ v = 0 \quad \text{إذن}$$

$$f \circ v = f \circ 0 \quad ? \quad v = 0 \quad \text{(لأنه متباينة إذا نُقل عنصرها متباينة)}$$

$$\forall n \in N : f \circ v(n) = f \circ 0(n) \quad \text{بتساوي}$$

$$f(v(n)) = f(0(n)) \xrightarrow{f} v(n) = 0(n) = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \forall n \in N$$

$$\text{وهذا} \quad \ker f_* = 0 \quad \leftarrow f_* \text{ متباينة}$$

$$f \circ 0(n) = f(0) = 0$$

$$\text{إذن} : \text{Im } f_* = \ker g_*$$

$$\Leftarrow u \in \text{Im } f_*$$

$$u \in \text{Hom}(N, M) \wedge \exists v \in \text{Hom}(N, M') : f_*(v) = u$$

$$\Rightarrow u \in \text{Hom}(N, M) \wedge \exists v \in \text{Hom}(N, M'), f \circ v = u$$

في تشكيلين وانا اعطيتهم هو التشكيلين

$$g_*(u) = g \circ u = g \circ (f \circ \sigma) = (g \circ f) \circ \sigma$$

$$0 \circ \sigma = 0 \text{ لان } (g \circ f) \circ \sigma = 0$$

$$u \in \ker g_*$$

اثبات الاضداد التالي: ليكن $u \in \ker g_*$ والطلب برهان

$$\exists? w \in \text{Hom}(N, M') : f_*(w) = u$$

$$: f \circ w = u$$

$$u \in \ker g_* \rightarrow u \in \text{Hom}(N, M) : g_*(u) = 0$$

$$\rightarrow u \in \text{Hom}(N, M) : g \circ u = 0$$

فقط انه ياتي

$$\rightarrow u \in \text{Hom}(N, M) : \text{Im } u \subseteq \ker g$$

$$: \text{Im } u \subseteq \text{Im } f$$

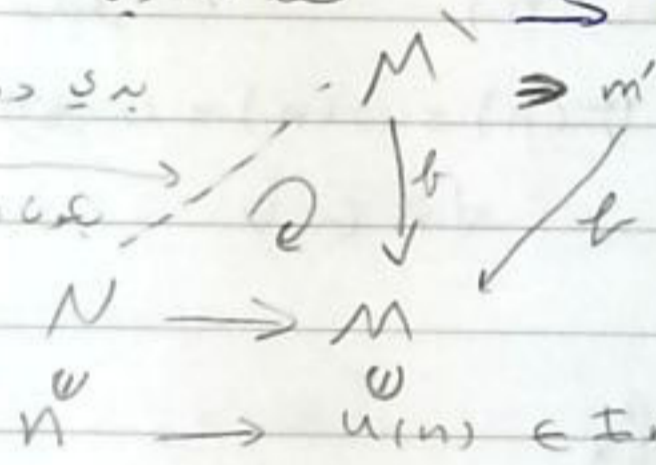
وذلك لان (*) كالتالي

$$\text{Im } u \subseteq \text{Im } f$$

$$u \in \text{Im } f$$

بدي دور w

محتاج يكون المخطط



$$N' \xrightarrow{\psi} N \xrightarrow{u} M \xrightarrow{f} M'$$

$$N' \xrightarrow{w} M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{u} N'$$

$$f \circ w = u \circ \psi$$

لأن $N \in N$ وانه $f \circ u(n) = u(n)$

$$\rightarrow \exists m' \in M' : f(m') = u(n)$$

$$w : N \rightarrow M' \text{ حيث } w(n) = m'$$

$$\omega : N \rightarrow M' \quad : \text{تعريف العلاقة}$$

$$n \rightarrow m' \quad : u(n) = f(m')$$

عن طريق من النطاق

$$n_1 = n_2 \Rightarrow u(n_1) = u(n_2) \quad : \text{سأثبت}$$

$$\Rightarrow f(m'_1) = f(m'_2)$$

فكانت

$$\Rightarrow m'_1 = m'_2 \rightarrow \omega(n_1) = \omega(n_2)$$

$$u(n_1) = f(m'_1)$$

$$u(n_2) = f(m'_2)$$

$$: \text{سأثبت}$$

$$\alpha, \beta \in A, n_1, n_2 \in N$$

$$\omega(\alpha n_1 + \beta n_2) = \lambda \in M'$$

$$u(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha u(n_1) + \beta u(n_2) \quad (\text{سأثبت } u)$$

$$= \alpha f(m'_1) + \beta f(m'_2)$$

$$= f(\alpha m'_1 + \beta m'_2) \quad (\text{سأثبت } f)$$

$$\omega(\alpha n_1 + \beta n_2) = \alpha m'_1 + \beta m'_2$$

$$= \alpha \omega(n_1) + \beta \omega(n_2)$$

$$u(n_i) = f(m'_i) \Rightarrow \omega(n_i) = m'_i \quad \text{حيث:}$$

$$i = 1, 2$$

إذاً $w \in \text{Hom}(N, M')$

إثبات أنه في كل $n \in N$:

$$f^*(w) = u$$

$$f \circ w(n) = f(w(n)) = f(m') \quad \forall n \in N \\ = u(n)$$

2015 // //

المحاضرة 10

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \quad \text{مبرهنة:}$$

متتالية كاتانية عند ما N هو N موجود عند A

$$2) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(M, N) \rightarrow \text{Hom}(M', N) \xrightarrow{f^*} 0$$

البرهان: يجب برهان أن: g^* متتالية كاتانية

$$\text{Im } g^* = \ker f^*$$

إثبات g^* متتالية كاتانية:

$$\forall \psi \in \ker g^* \rightarrow \psi \in \text{Hom}(M'', N) \wedge g^*(\psi) = 0$$

$$g^*(\psi) = 0 \rightarrow \psi \circ g = 0$$

$$\rightarrow \psi \circ g = 0 \circ g$$

كون g غامر $\leftarrow g$ يقبل الاضمار من المبدأ لأن

عند هات كون g غامر فإنه يوجد:

$$M \xrightarrow{g} M''$$

$m' \leftarrow m''$

$$S: M'' \rightarrow M$$

$$m'' \rightarrow m$$

$$m'' \in M'' \xrightarrow{\text{غامر}} \exists m \in M : g(m) = m''$$

$$g \circ S(m'') = g(S(m'')) = g(m) = m'' = \text{id}_{M''}(m'')$$

تطبيق
طائفة

$$g \circ S = \text{id}_{M''}$$

وبنه

نتيجة مما سبق: g غامر \leftarrow

$$\exists S: M'' \rightarrow M$$

$$g \circ S = \text{id}_{M''}$$

$$\forall \varphi \circ g = 0 \circ g$$

لدينا:

$$(\varphi \circ g) \circ S = (0 \circ g) \circ S$$

$$\varphi \circ (g \circ S) = 0 \circ (g \circ S)$$

لأنه $g \circ S = \text{id}_{M''}$ نحصل

$$\varphi = 0$$

وبنه $\ker g^* = 0$ إذا g^* متباين

لست أن $\text{Im } g^* = \ker f^*$ تعريف المبدأ

$$\forall \varphi \in \text{Im } g^* \rightarrow \varphi \in \text{Hom}(M, N)$$

$$\wedge \exists u \in \text{Hom}(M'', N) : g^*(u) = \varphi$$

$$u \circ g = \varphi$$

$$f^*(v) = v \circ f = (u \circ g) \circ f = u \circ (g \circ f)$$

$$\stackrel{\text{تالي}}{=} u \circ 0 = 0$$

دنه $v \in \ker f^*$
وبالتالي $\text{Im } g^* \subseteq \ker f^*$

ولنتب الاضواء التالي:

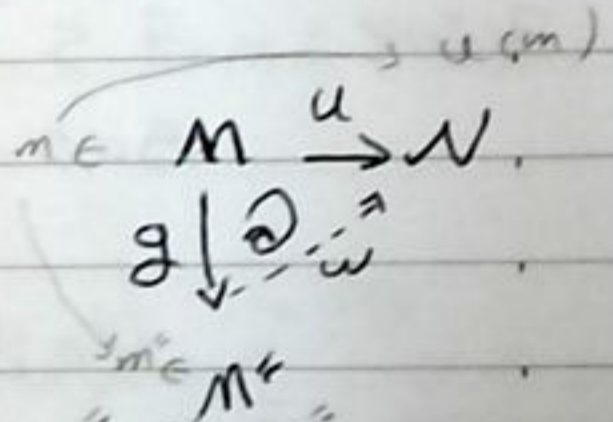
$$u \in \ker f^* \rightarrow \begin{cases} u: M \xrightarrow{\text{تساك}} N \\ u \circ f = 0 \end{cases}$$

ولنتب ان $u \in \text{Im } g^*$ اي يجب برهان انه موجود

~~وجود~~

$$\exists w: M'' \xrightarrow{\text{تساك}} N$$

$$w \circ g = u$$



$$w: M'' \rightarrow N$$

$$m'' \rightarrow w(m'') = u(m)$$

$$g(m) = m'' \quad \text{حيث}$$

w تطبيق 1:1

وكندي g عام وانه يربط
عنيت M و ليكن m فيه
 $g(m) = m''$

انالي اول لهند N

$$m_1'' = m_2'' \Rightarrow \exists m_1 \in M$$

$$: g(m_i) = m_i''$$

$$i = 1, 2$$

$$m_1'' = m_2'' \rightarrow g(m_1) = g(m_2)$$

دنه $g(m) = m''$ حيث

$$w(m'') = u(m)$$

$$\rightarrow m_1 - m_2 \in \ker g$$

$$u \circ f = 0 \rightarrow \text{Im } f \subseteq \ker u \text{، ولكن}$$

$$\rightarrow \ker g \subseteq \ker u$$

$$m_1 - m_2 \in \ker g \subseteq \ker u \text{ : إذاً}$$

$$\rightarrow u(m_1 - m_2) = 0 \rightarrow u(m_1) = u(m_2)$$

$$\rightarrow w(m_1') = w(m_2')$$

البتة كل وظيفة (بسيط جداً)

إذاً $w \in \text{Hom}(M', N)$ وليكن $g^*(w) = u$ وليكن $w \circ g = u$

بدي أدبته المخطط يتبين أي

$$w \circ g(m) = w(g(m))$$

$$= u(m)$$

$$\boxed{w \circ g = u}$$

إذاً

وظيفة وليكن M, N, M', N' عموماً تكون

كل حلقة A وليكن:

$$f: M \rightarrow N$$

$$f': M' \rightarrow N'$$

تساكين موردولين: تعرف العلاقة:

$$f \times f': M \times M' \rightarrow N \times N'$$

$$(x, x') \rightarrow (f(x), f'(x'))$$

إن $f' \times f$ تسا كل موردولي وظيفة.

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0 \quad [2]$$

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f'} N' \xrightarrow{g'} N'' \rightarrow 0$$

متالين تاسمن من التراكبات الودولية عندها

$$0 \rightarrow M \times N \xrightarrow{f \times f'} M' \times N' \xrightarrow{g \times g'} M'' \times N'' \rightarrow 0$$

اثبات أنها متالين تامة وخطيئة.

الجداء في الجداء المباشر

\oplus و π

الجداء الديكارتي: لنأخذ $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من الودونات على حلقة A

لنعرّف المجموعة التالية:

$$\pi M_i = \left\{ (m_i) : m_i \in M_i \right\}_{i \in I}$$

$$(m_i) = (\dots, m_i, m_{i+1}, \dots)$$

لتزود πM_i بجماع ونوئي متكامل:

$$(m_i) + (m'_i) = (m_i + m'_i)_{i \in I} \in \pi M_i$$

وليك $\lambda \in A$

$$\lambda \cdot (m_i) = (\lambda m_i)_{i \in I} \in \pi M_i$$

إن

$$\left(\prod_{i \in I} M_i, +, \cdot \right) \text{ هو دوال على } A$$

تدعى الجداء الديكارتي

$$\left\{ M_i \right\}_{i \in I} \text{ عائلة}$$

الاثبات وظيفية أنه هو دوال

2015 11/16

الحاضرة 11

- نعرف العلاقات الثنائية التالية:

$$P_j^r : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_j$$

$$M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$$

$$(x, y) \rightarrow x$$

$$M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$$

$$(x, y) \rightarrow y$$

$$\left(m_i \right)_{i \in I} \rightarrow m_j$$

العنصر الموجود
في المركبة j

إن P_j^r تشكل تناكلات مودولية

صما يكن $j \in I$ وكذلك P_i^r صما تكن $i \in I$

يدعى P_j^r تناكلا صما القانوني عند المركبة j (صما يكن $j \in I$)

$$M_1 \times M_2 = \left\{ (x, y) : x \in M_1, y \in M_2 \right\}$$

$$P_1^r : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$$

$$(x, y) \rightarrow x$$

صما المركبة 1

$$P_2^r : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$$

$$(x, y) \rightarrow y$$

البرهان: ليكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من الودوكلات على حلقه A فنقول لنا
 الشائفة $(M, \{f_i\}_{i \in I})$ حيث M مودول على حلقه A
 أسرة من الشائفات $\{f_i\}_{i \in I}$
 $f_i: M \rightarrow M_i$

وذلك مما يكفينا $i \in I$

إلا جاء لنا أسرة $\{M_i\}_{i \in I}$ إننا نثبت ما يلي:

لا نجد كل $(N, \{g_i\}_{i \in I})$ حيث N مودول على A

و $g_i: N \rightarrow M_i$ شائفات مودولة لا نجد كل $i \in I$

فإنه يوجد شائفة واحدة

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \\
 h \swarrow & \downarrow g_i & \\
 M & \xrightarrow{f_i} & M_i
 \end{array}$$

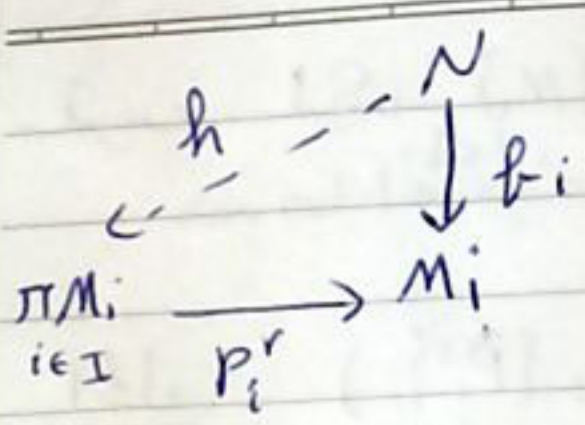
حيث $h: N \rightarrow M$
 $f_i \circ h = g_i \quad \forall i \in I$

ملاحظة: لنكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من الودوكلات على A

إن $(\prod_{i \in I} M_i, \{p_i\}_{i \in I})$ تشكل جداء لا

البرهان: ليكن $(N, \{f_i\}_{i \in I})$ حيث N هو A -مودول على A

و $f_i: N \rightarrow M_i$ شائفة مودولة
 $\forall i \in I$

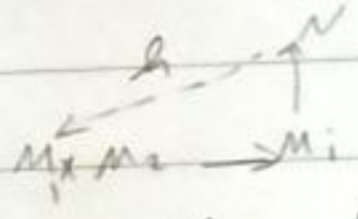


تعرف: $h: N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$

$n \rightarrow h(n) = (f_i(n))_{i \in I}$

$h(n) = (f_1(n), f_2(n), \dots)$

! أن h تطبق وبنوعاً وبنوعاً. $\left. \begin{array}{l} \text{و} \\ \text{بنوعاً} \end{array} \right\}$



$p_i^r \circ h = f_i, \forall i \in I$

$h(n) = (f_1(n), f_2(n), \dots)$

$$p_i^r \circ h(n) = p_i^r(h(n)) = p_i^r(f_i(n)) = f_i(n), \forall i \in I, \forall n \in N$$

$k: N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$

h رصه : ليكن

كيفية مما يمكن $i \in I$ فان

$p_i^r \circ k = f_i$

مما يمكن $n \in N$

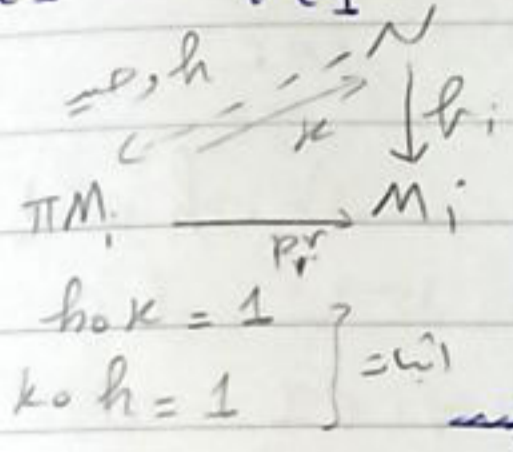
$f_i(n) = p_i^r \circ k(n) = p_i^r \circ h(n)$

$$p_i^r(k(n)) = p_i^r(h(n)) \forall i \in I$$

ومنه للمركبة i للمركبة $k(n)$ ساوي المركبة i للمركبة $h(n)$ وذلك مما يمكن $i \in I$.
 إذاً $k(n) = h(n)$ مما يمكن $n \in N$.

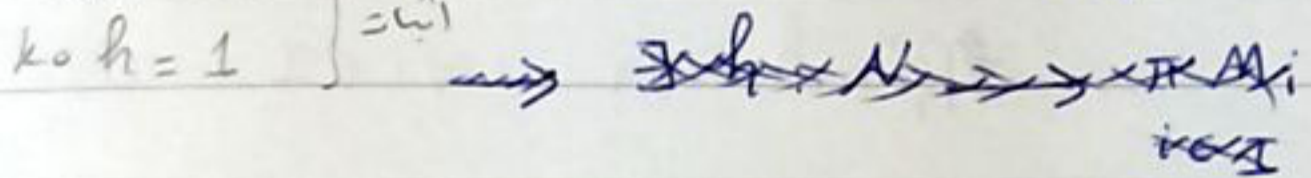
تبرين: ليكن $\{M_i\}$ أسرة من المودولات على الحلقة A

عندها أي جداء لهذه الأسرة سيأخذ $(\prod_{i \in I} M_i, \{P_i^v\})$



الحل: $(\prod_{i \in I} M_i, \{P_i^v\})$

$\{M_i\}$ صواب للأسرة



لتوهين وجود جداء آخر $(N, \{b_i\})$ لـ $\{M_i\}$ عندئذ

$$\{M_i\} \text{ صواب لـ } (\prod_{i \in I} M_i, \{P_i^v\}) \Rightarrow \exists h : N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$$

$$\forall i \in I \quad P_i^v \circ h = b_i$$

$$\exists \kappa : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow N \text{ فانه } \{M_i\} \text{ صواب لـ } (N, \{b_i\})$$

$$h \circ \kappa = \kappa \circ h \text{ ولنت } \forall i \in I \quad b_i \circ \kappa = P_i^v$$

$$\forall i \in I : b_i = P_i^v \circ h = (b_i \circ \kappa) \circ h$$

$$b_i = b_i \circ (\kappa \circ h) \text{ , } \kappa \circ h$$

$$b_i = b_i \circ 1 \text{ لـ } \kappa \circ h = 1$$

$$\kappa \circ h = 1 \text{ ارآ}$$

$\forall i \in I$ مع حرية أخرى لدينا
 تكون $h_{0k} = 1$
 رتبة المتطابق