جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

مقرر التحليل 3

المحاضرة الثامنة

تاريخ المحاضرة: 4/11/2015

مُدرس المقرر: د. يحيى قطيش

المتسلسلات التابعية

تعريف: لتكن $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرفة على مجال ما مثل I من $\mathbb{R}$. عندئذٍ نسمي المجموع الغير منتهي الآتي

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots}_{*}$$

بمتسلسلة توابع حقيقية مُعرفة على I ، ويُسمى التابع $f_1(x)$ بالحد الأول للمتسلسلة * ، و $f_2(x)$ بالحد الثاني للمتسلسلة * و... و التابع $f_n(x)$ بالحد العام أو الحد النوني للمتسلسلة *.

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع مُعرفة على مجال ما مثل I. عندئذٍ تُسمى المتتالية $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ والتي حدودها:

$$S_1(x) = f_1(x)$$

$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\vdots$$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} f_k(x)$$

بمتتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ على المجال I.

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع مُعرفة على مجال ما مثل I. نقول عن المتسلسلة السابقة أنها متقاربة نقطياً من تابع مثل $S(x)$ على I **إذا وفقط إذا** كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة نقطياً من التابع $S(x)$ على I. أي إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I$$

وعندها نسمي التابع $S(x)$ بتابع المجموع على I لمتسلسلة التوابع المدروسة. أي $S(x)$ يُمثل مجموع المتسلسلة المدروسة على I ونكتب

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I$$

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع مُعرفة على مجال ما مثل I. نقول عن المتسلسلة السابقة أنها متقاربة بانتظام من تابع مثل $S(x)$ على I **إذا وفقط إذا** كانت متتالية المجاميع الجزئية لها $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام من التابع $S(x)$ على I.

تعريف: نقول عن متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ أنها متقاربة نقطياً من تابع مثل $S(x)$ على مجال معين I إذا كانت متقاربة كمتسلسلة عددية من أجل كُل قيمة عددية للمتغير x من I.

نتائج: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع معرفة على مجال I.

1– إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة بانتظام من تابع $S(x)$ على المجال I فإنها تكون متقاربة نقطياً من $S(x)$ على ذلك المجال.

2– إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة نقطياً من تابع $S(x)$ على المجال I فإن حدها العام $f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري عندما تسعى n إلى اللانهاية. أي

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \text{ متقاربة نقطياً من } S(x) \text{ على } I \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad ; \quad \forall\, x \in I$$

لكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً بمعنى إذا كان الحد العام $f_n(x)$ يسعى للتابع الصفري عندما تسعى n إلى اللانهاية فإن المتسلسلة قد تكون متقاربة نقطياً من تابع $S(x)$ على I وقد لا تكون كذلك.

مثال ذلك هو: لنأخذ متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ التي حدها العام

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \quad , \quad x \in I = \mathbb{R} \quad (\text{توابع ثابتة})$$

واضح أن

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \forall x \in I = \mathbb{R}$$

لكن المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

متباعدة من أجل كُل قيم $x \in I = \mathbb{R}$ لأن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ هي المتسلسلة التوافقية وهي متباعدة.

3– إن حذف عدد منتهي من الحدود الأولى للمتسلسلة التابعية أو إضافة عدد منتهي من الحدود إلى بداية المتسلسلة لا يُغيران طبيعة المتسلسلة (أي إذا كانت متقاربة تبقى متقاربة وإذا كانت متباعدة تبقى متباعدة) **لكن** في حالة التقارب فإن تابع المجموع للمتسلسلة قد يتغير.

4– إذا سعى الحد العام لمتسلسلة التوابع إلى تابع غير صفري على I فإن هذه المتسلسلة تكون متباعدة على I.

5– إن مجموعة جميع قيم x التي من أجلها تكون متسلسلة التوابع متقاربة كمتسلسلة عددية تُدعى **منطقة التقارب** لهذه المتسلسلة التابعية.

مثال(1): أوجد منطقة تقارب متسلسلة التوابع

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

المعرفة على $\mathbb{R}$ ، ثم أوجد مجموعها على منطقة تقاربها.

الحل: من أجل كُل قيمة لـِ x من $\mathbb{R}$ نحصل من المتسلسلة التابعية المفروضة على المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

والتي هي متسلسلة هندسية أساسها $q = x$ وحدها الأول $a = 1$. ونعلم أنها متقاربة إذا وفقط إذا كان $|q| = |x| < 1$ ومتباعدة إذا وفقط إذا كان $|q| = |x| \geq 1$.

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة التابعية المفروضة هي مجموعة جميع قيم x المحققة لـِ

$$|x| < 1 \iff -1 < x < +1$$

أي منطقة التقارب هي المجال $]-1, +1[$. ومجموع المتسلسلة التابعية المفروضة على منطقة تقاربها هو التابع:

$$S(x) = \frac{\text{الحد الأول}}{1-\text{الأساس}} = \frac{1}{1-x}.$$

مثال(2): أوجد منطقة تقارب متسلسلة التوابع

$$\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

المعرفة على $\mathbb{R}$ ، ثم أوجد مجموعها على منطقة تقاربها.

الحل: من أجل كُل قيمة لـِ x من $\mathbb{R}$ نحصل من المتسلسلة التابعية المفروضة على المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=2}^{+\infty} x^n = x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

والتي هي متسلسلة هندسية أساسها $q = x$ وحدها الأول $a = x^2$. ونعلم أنها متقاربة إذا وفقط إذا كان $|q| = |x^2| < 1$ أي $|x| < 1$ ، ومتباعدة إذا وفقط إذا كان $|q| = |x^2| \geq 1$ أي $|x| \geq 1$.

أي أن منطقة تقارب المتسلسلة التابعية المفروضة هي مجموعة جميع قيم x المحققة لـِ

$$|x| < 1 \iff -1 < x < +1$$

أي منطقة التقارب هي المجال $]-1,+1[$. ومجموعها على منطقة تقاربها هو التابع

$$S(x)=\frac{\text{الحد الأول}}{1-\text{الأساس}}=\frac{x^2}{1-x}.$$

مُلاحظة: إن المتسلسلة التابعية في المثال(1) هي نفسها المتسلسلة التابعية في المثال (2) بعد حذف أول حدين منها ومن الملاحظ أن حذف الحدين لم يغير من طبيعة المتسلسلة التابعية أي بقيت منطقة التقارب نفسها **لكن** المجموع تغير وهذا ما يُثبت على صحة النتيجة الثالثة من النتائج السابقة.

مثال(3): ادرس المتسلسلة التابعية الآتية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\,(1-x)$$

والمعرفة على $\mathbb{R}$.

الحل: إن المتسلسلة المفروضة تُكتب بالشكل

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n-x^{n+1})$$

لنوجد المجموع الجزئي النوني لها ، ونعلم أن

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{k=n}(x^k-x^{k+1})=(x-x^2)+(x^2-x^3)+\cdots+(x^{n-1}-x^n)+(x^n-x^{n+1})$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بإجراء الاختصارات المناسبة}} \qquad S_n(x)=x-x^{n+1}$$

لندرس تقارب $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}=\{x-x^{n+1}\}_{n\geq 1}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة التابعية المفروضة.

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\lim_{n\to+\infty}(x-x^{n+1})=x-\lim_{n\to+\infty}x^{n+1}\quad \ldots(1)$$

لكن نعلم أن:

$$\lim_{n\to+\infty}x^{n+1}=\begin{cases}\text{غير موجودة} & if \quad x\leq -1\\ 0 & if \quad -1<x<+1\\ 1 & if \quad x=1\\ +\infty & if \quad x>1\end{cases}$$

بالعودة إلى (1) نجد أن:

$$S(x)=\begin{cases}\text{غير موجودة} & if \quad x\le -1\\ x & if \quad -1<x<+1\\ 0 & if \quad x=1\\ -\infty & if \quad x>1\end{cases}$$

وهذا يعني أن $\{S_n(x)\}_{n\ge1}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة التابعية المفروضة تكون متقاربة عندما $-1<x<+1$ و عندما $x=1$. أي متقاربة نقطياً على المجال $I=]-1,+1]$ من التابع:

$$S(x)=\begin{cases} x & if \quad -1<x<+1\\ 0 & if \quad x=1\end{cases}$$

وهذا بدوره يُعني أن متسلسلة التوابع المفروضة تكون متقاربة نقطياً على المجال $I=]-1,+1]$ من التابع $S(x)$ والذي يُمثل مجموعها على منطقة تقاربها.

مثال(4): بين فيما إذا كانت متسلسلة التوابع

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\frac{1}{(x+3)(x+4)}-\cdots$$

متقاربة نقطياً على $I=[0,1]$ أم لا؟ علل إجابتك.

في حال كانت متقاربة نقطياً فهل تقاربها منتظم على $I=[0,1]$؟ علل إجابتك.

الحل: إن المتسلسلة المفروضة تكتب بالشكل الآتي

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots$$

وبحيث:

$$f_1(x)=\frac{1}{x+1}\quad,\quad f_n(x)=-\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}\underbrace{=}_{\text{بعد تفريق الكسر}}\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\quad;\quad n\ge 2$$

لنوجد المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة التابعية المفروضة ونعلم أن

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{k=n} f_k(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_{n-1}(x)+f_n(x)\qquad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{استفد من } f_1(x)=\frac{1}{x+1}\\ \text{واستفد من } f_n(x)\\ \text{بعد تفريق الكسر}}}$$

$$S_n(x)=\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{x+n-2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n-1}\right)$$

بإجراء الاختصارات المناسبة نحصل على:

$$S_n(x) = \frac{1}{x+n} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x+n} = 0 \quad ; \quad \forall\, x \in I = [0,1]$$

من الأخيرة نستنتج أن $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري $S(x) = 0$ على $I = [0,1]$. وهذا يعني أن المتسلسلة المفروضة متقاربة نقطياً من التابع الصفري على المجال $I = [0,1]$ أي مجموعها هو $S(x) = 0$ على ذلك المجال.

لنثبت أن متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المفروضة متقاربة بانتظام من التابع الصفري على $I = [0,1]$.

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ لنبحث في وجود العدد الطبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

وذلك لجميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0(\varepsilon)$ ، ولجميع قيم $x \in I = [0,1]$.

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1}{n+x} - 0\right| = \left|\frac{1}{n+x}\right| \underbrace{=}_{\substack{\text{إن } n\geq 1 \text{ موجب و} \\ x\in[0,1] \text{ أي } x \text{ موجبة}}} \frac{1}{n+x} \underbrace{<}_{\substack{\text{لكُل قيم } x \text{ من } I \\ \text{ولكُل } n\geq 1}} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يُمكن اختيار العدد الطبيعي N_0 بحيث $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ أي بحيث $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (يتعلق بِـ ε فقط) ومع هذا الاختيار سوف يتحقق:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

وذلك لكُل $n \geq N_0(\varepsilon)$ ، ولكُل $x \in I = [0,1]$.وهذا بدوره يعني أن $\{S_n(x)\}_{n\geq 1}$ متقاربة بانتظام على $I = [0,1]$ من التابع الصفري ومن ثم تكون المتسلسلة المفروضة متقاربة بانتظام على $I = [0,1]$ من التابع الصفري $S(x) = 0$.

تعريف: لتكن $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متسلسلة توابع مُعرفة على مجال ما I ، ولنفرض أنها متقاربة نقطياً من التابع $S(x)$ على I (أي مجموعها $S(x)$ على I).عندئذٍ فإن مجموع الباقي النوني لهذه المتسلسلة والذي نرمز لهُ بِـ $r_n(x)$ يُعطى بالعلاقة:

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{k=1}^{k=n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I$$

تعريف: إذا كانت متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ متقاربة نقطياً من التابع $S(x)$ على I **فإنها** تكون متقاربة بانتظام من التابع $S(x)$ على I إذا وجد من أجل كُل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ عدد طبيعي $N_0 = N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

من أجل جميع قيم n المحققة لِـ $n \geq N_0$ ، ومن أجل جميع قيم x من I.

مثال: لتكن لدينا المتسلسلة التابعية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad , \quad x \in I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

المطلوب: دراسة التقارب المنتظم والتقارب المطلق للمتسلسلة المعطاة.

الحل: نعلم أنهُ حتى تكون المتسلسلة التابعية المفروضة متقاربة نقطياً على $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ هو أن تكون المتسلسلة العددية الناتجة عنها بإعطاء قيمة لِـ x من I متقاربة وذلك لكُل قيم x من I.

إن المتسلسلة المفروضة من أجل أي قيمة معينة لِـ x من I هي متسلسلة عددية من الشكل

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad ; \quad a_n = \frac{x^n}{n}$$

وتندرج ضمن السلاسل العددية المتناوبة.

لدينا منطقياً:

$$x^n > x^{n+1} \;\; ; \; \forall\, n \geq 1 \;\; , \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

وأيضاً لدينا منطقياً:

$$n = n \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\; \Rightarrow n < n+1 \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\; \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad ; \;\; \forall\, n \geq 1$$

$$\left.\begin{array}{l} x^n > x^{n+1} \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\; , \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \qquad\qquad and \\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad ; \;\; \forall\, n \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^n}{n} > \frac{x^{n+1}}{n+1} \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\; , \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^n}{n}\right| > \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1 \;\; , \forall\, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow |a_n| > |a_{n+1}| \;\; ; \;\; \forall\, n \geq 1$$

من أجل أي قيمة لِـ x من I فإن الشرط الأول من شروط ليبنتز مُحقق.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} . \lim_{n\to+\infty} x^n \underbrace{=}_{\text{لأن } \frac{1}{2}\le x\le 1} 0.0 = 0$$

من أجل أي قيمة لـِ x من I فإن الشرط الثاني من شروط ليبنتز مُحقق.

نستنتج "استناداً لاختبار ليبنتز" أن المتسلسلة المفروضة متقاربة نقطياً على $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

لإثبات أن تقارب المتسلسلة المفروضة منتظم على $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ نلجأ للتعريف السابق.

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ نبحث في وجود عدد طبيعي $N_0(\varepsilon) \neq 0$ بحيث يتحقق

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

من أجل جميع قيم n المحققة لـِ $n \ge N_0$ ، ومن أجل جميع قيم x من $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \le \left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right| \underbrace{=}_{\substack{\text{كون } n\ge 1 \text{ موجب} \\ \text{و } x\in I=\left[\frac{1}{2},1\right] \text{ فهي موجبة}}} \frac{x^{n+1}}{n+1} \underbrace{\le}_{\text{كون } x\in I=\left[\frac{1}{2},1\right]} \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{N_0+1} < \varepsilon$$

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$ يُمكن اختيار العدد الطبيعي N_0 بحيث $\frac{1}{N_0+1} < \varepsilon$ أي بحيث

$N_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ أي بحيث $N_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (يتعلق بِـ ε فقط) ومع هذا الاختيار سوف يتحقق:

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

وذلك لكُل $n \ge N_0(\varepsilon)$ ، ولكُل $x \in I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. مما سبق نستنتج أن المتسلسلة التابعية المفروضة متقاربة بانتظام على $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

- من أجل $x = 1$ نجد أن المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

متقاربة شرطياً وليس بالإطلاق. "راجع المثال(1) صـ5 من المحاضرة الثانية".

وهُنا نقول أن متسلسلة التوابع المفروضة متقاربة شرطياً وليس بالإطلاق على المجال $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

استفدنا في المثال السابق من المبرهنة الإضافية الهامة الآتية: إذا كانت المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x_n$ متقاربة حسب اختبار ليبنتز فإن القيمة المطلقة لمجموع باقيها النوني لا يتجاوز القيمة المطلقة لأول حد من هذا الباقي.

انتهت المحاضرة الثامنة