جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

المعادلات التفاضلية (1)

المحاضرة السابعة

تاريخ المحاضرة: 28/10/2015

مدرس المقرر: د. خليل يحيى

الفقرة السابعة: المعادلات التفاضلية التامة وطريقة إيجاد الحل العام لها.

تعريف: ليكن التابع $f(x,y)$ المعرف والمستمر على منطقة تغيرات (x,y) ، ومشتقاته الجزئية من المرتبة الأولى بالنسبة لـِ x,y مستمرة في كُل نقطة من منطقة التغيرات. عندئذٍ فإن التفاضل الكلي أو التفاضل التام للتابع $f(x,y)$ يُعطى بالعلاقة:

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

فعلى سبيل المثال إن المقدار $2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ هو تفاضل تام للتابع $f(x,y) = x^2y^3$.

تعريف: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

بحيث N, M دالتين معرفتين ومستمرتين على منطقة تغيرات (x,y).

نسمي المعادلة السابقة بمعادلة تفاضلية تامة إذا كان الطرف الأيسر تفاضلاً تاماً (كُلياً) لتابع ما مثل $f(x,y)$.

أي إذا وجدت دالة مثل $f(x,y)$ بحيث

$$d[f(x,y)] = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

طريقة إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية في حال كانت تامة: لنفرض أن المعادلة التفاضلية المعطاة بالتعريف تامة. بالتالي توجد دالة $f(x,y)$ بحيث يكون التفاضل الكلي لهذه الدالة مطابقاً للطرف الأيسر من تلك المعادلة أي

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة نحصل عليه بالشكل:

$$d[f(x,y)] = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \quad f(x,y) = C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

مثال(1): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2dx + y^2dy = 0$$

الحل: نضرب طرفي المعادلة المفروضة بِـ (3) فنحصل على:

$$3x^2dx + 3y^2dy = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{المعادلة الناتجة} \\ \text{تامة}}} \quad d[x^3 + y^3] = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \quad x^3 + y^3 = C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xdx + ydy = 0$$

الحل:

$$xdx + ydy \underbrace{\Rightarrow}_{\text{المعادلة تامة}} d[x.y] = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} x.y = C \Rightarrow y = \frac{C}{x} \;;\quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

- لقد اعتمدنا في حل المثالين السابقين على التخمين والسرعة في الحصول على التابع f ومن ثم الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة. وهنا نطرح السؤالين الآتيين:

السؤال الأول: كيف نتمكن من معرفة فيما إذا كانت المعادلة التفاضلية المعطاة بالتعريف تامة أم لا؟

السؤال الثاني : في حالة كون المعادلة التفاضلية تامة كيف يمكن إيجاد التابع f . أي كيف يمكن إيجاد الحل العام لها ؟.

في الحقيقية إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \dots (1)$$

تامة فهذا يعني أنهُ يوجد تابع $f(x,y)$ بحيث:

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ومن الأخيرة ينتج أن:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \dots *$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) \quad \dots **$$

نشتق طرفي العلاقة * جزئياً بالنسبة للمتحول y "وذلك بفرض أن M قابلة للاشتقاق الجزئي بالنسبة لـِ y " فنحصل على:

$$\frac{\partial 2f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

ونشتق طرفي العلاقة ** جزئياً بالنسبة للمتحول x "وذلك بفرض أن N قابلة للاشتقاق الجزئي بالنسبة لـِ x" فنحصل على:

$$\frac{\partial 2f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

بما أن $\frac{\partial 2f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial 2f}{\partial y\partial x}\Rightarrow \boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$

والأخيرة هي التي تُمثل الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة التفاضلية (1) تامة.

"ما سبق هو الإجابة على السؤال الأول"

لدينا من *

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)\underbrace{\Rightarrow}_{x \text{ بالمكاملة بالنسبة لـ}} f(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\psi(y)\quad \dots ***$$

وبحيث $\psi(y)$ تابع كيفي بالنسبة لِـ y نقوم بتعينهُ بحيث يُحقق التابع $f(x,y)$ العلاقة **.

نشتق طرفي *** بالنسبة لِـ y فنحصل على

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx\right)+\psi'(y)\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\psi'(y)$$

نقارن المساواة الأخيرة مع ** فنجد أن

$$N(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\psi'(y)$$

لكن لدينا "كون المعادلة (1) تامة" الشرط:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي:

$$N(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx+\psi'(y)\Rightarrow N(x,y)=[N(x,y)]_{x_0}^{x}+\psi'(y)$$

$$\Rightarrow N(x,y)=N(x,y)-N(x_0,y)+\psi'(y)\Rightarrow \psi'(y)=N(x_0,y)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{y \text{ بالمكاملة بالنسبة لِـ}}\psi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy$$

نعوض في *** فنحصل على:

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

والطريقة السابقة هي طريقة تعيين التابع f في الحالة التي تكون فيها المعادلة التفاضلية (1) تامة.

بجعل التابع الأخير مساوياً لثابت اختياري C نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (1). أي أن الحل العام هو:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=C \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

وبحيث (x_0,y_0) نقطة كيفية اختيارية بشرط أن تنتمي إلى ساحة تعريف N,M.

"ما سبق هو الإجابة على السؤال الثاني"

مُلاحظة: يمكننا الإجابة على السؤال الثاني بطريقة أُخرى كما يلي:

لدينا من **

$$\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة بالنسبة لِـ } y} \quad f(x,y)=\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy+\psi(x) \quad \ldots ***$$

وبحيث $\psi(x)$ تابع كيفي بالنسبة لِـ x نقوم بتعينهُ بحيث يُحقق التابع $f(x,y)$ العلاقة *.

نشتق طرفي *** بالنسبة لِـ x فنحصل على

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{y_0}^{y} N(x,y)dy\right)+\psi'(x) \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy+\psi'(x)$$

نقارن المساواة الأخيرة مع * فنجد أن

$$M(x,y)=\int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy+\psi'(x)$$

لكن لدينا:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

وبالتالي:

$$M(x,y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dy+\psi'(x)\Rightarrow M(x,y)=[M(x,y)]_{y_0}^{y}+\psi'(x)$$

$$\Rightarrow M(x,y)=M(x,y)-M(x,y_0)+\psi'(x)\ \Rightarrow\ \psi'(x)=M(x,y_0)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{x\ \text{بالمكاملة بالنسبة لـ}}\quad \psi(x)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx$$

نعوض في *** فنحصل على:

$$f(x,y)=\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy+\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx$$

بجعل التابع الأخير مساوياً لثابت اختياري C نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية (1). أي أن الحل العام هو:

$$\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy+\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx=C\quad ;\quad C\ \text{ثابت اختياري}$$

وبحيث (x_0,y_0) نقطة كيفية اختيارية بشرط أن تنتمي الى ساحة تعريف N,M.

أمثلة على الفقرة السابعة

مثال(1): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{1}{x}dy-\frac{y}{x^2}dx=0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\quad ;\quad M(x,y)=-\frac{y}{x^2}\quad ,\quad N(x,y)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}\quad ,\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

مما يعني أن المعادلة التفاضلية المفروضة تامة.

كون المعادلة المفروضة تامة برهاناً فنبحث عن الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy$$

نعلم من الدراسة النظرية أن:

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x) = \int \frac{1}{x}dy + \psi(x) \Rightarrow \underbrace{f(x,y) = \frac{y}{x} + \psi(x)}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + \psi'(x) \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)} -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2} + \psi'(x) \Rightarrow \psi'(x) = 0$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة بالنسبة لـِ } x} \psi(x) = C$$

في الأخيرة C ثابت كيفي ودائماً نُعطيه القيمة صفر ومنه:

$$\psi(x) = 0$$

نعوض في (1) فنحصل على:

$$f(x,y) = \frac{y}{x}$$

$$f(x,y) = C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \Rightarrow y = C_1 x \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

مثال(2): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad ; \quad M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \quad , \quad N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy^2) = 12xy \quad , \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y + 4y^3) = 12xy$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

مما يعني أن المعادلة التفاضلية المفروضة تامة.

كون المعادلة المفروضة تامة برهاناً فنبحث عن الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$d[f(x,y)]=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy=(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy$$

نعلم من الدراسة النظرية أن:

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\psi(y)=\int(3x^2+6xy^2)dx+\psi(y)\Rightarrow\underbrace{f(x,y)=\ x^3+3x^2y^2+\psi(y)}_{(1)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=6x^2y+\psi'(y)\quad\underbrace{\Rightarrow}_{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)}\quad 6x^2y+4y^3=6x^2y+\psi'(y)\Rightarrow$$

$$\psi'(y)=4y^3\quad\underbrace{\Rightarrow}_{y\ \text{بالمكاملة بالنسبة لـ}}\quad\psi(y)=y^4$$

نعوض في(1) فنحصل على:

$$f(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$$

$$f(x,y)=C\ \ \Rightarrow\ \ x^3+3x^2y^2+y^4=C\quad;\quad C\ \text{ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

مثال(3): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\quad;\quad M(x,y)=x+y+1\ \ ,\ \ N(x,y)=x-y^2+3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)=1\ \ ,\quad\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2+3)=1$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

مما يعني أن المعادلة التفاضلية المفروضة تامة.

كون المعادلة المفروضة تامة برهاناً فنبحث عن الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$d[f(x,y)]=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy=(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$$

نعلم أن:

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\psi(y)=\int (x+y+1)dx+\psi(y)\Rightarrow \underbrace{f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x+\psi(y)}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+\psi'(y) \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)} x-y^2+3=x+\psi'(y)\Rightarrow$$

$$\psi'(y)=-y^2+3 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة بالنسبة لِـ } y} \psi(y)=-\frac{1}{3}y^3+3y$$

نعوض في(1) فنحصل على:

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{1}{3}y^3+3y$$

$$f(x,y)=C \Rightarrow \frac{x^2}{2}+xy+x-\frac{1}{3}y^3+3y=C \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

تمارين وظيفة: أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

1) $(4x-3y-y\sin x)dx+(\cos x-3x-\sin y)dy=0$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \quad ; \quad M(x,y)=4x-3y-y\sin x \quad , \quad N(x,y)=\cos x-3x-\sin y$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x-3y-y\sin x)=-3-\sin x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\cos x-3x-\sin y)=-\sin x-3$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

مما يعني أن المعادلة التفاضلية المفروضة تامة.

كون المعادلة المفروضة تامة برهاناً فنبحث عن الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$= (4x - 3y - y\sin x)dx + (\cos x - 3x - \sin y)dy$$

نعلم أن:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \psi(y) = \int (4x - 3y - y\sin x)dx + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\underbrace{f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y\cos x + \psi(y)}_{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x + \cos x + \psi'(y) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)}$$

$$\cos x - 3x - \sin y = -3x + \cos x + \psi'(y) \Rightarrow \psi'(y) = -\sin y \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة بالنسبة لـِ } y} \quad \psi(y) = \cos y$$

نعوض في(1) فنحصل على:

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y\cos x + \cos y$$

$$f(x,y) = C \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 3xy + y\cos x + \cos y = C \quad ; \quad \text{ثابت اختياري } C$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

2) $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad ; \quad M(x,y) = 4x^3y^3 - 2xy \quad , \quad N(x,y) = 3x^4y^2 - x^2$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3 - 2xy) = 12x^3y^2 - 2x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4y^2 - x^2) = 12x^3y^2 - 2x$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

مما يعني أن المعادلة التفاضلية المفروضة تامة.

كون المعادلة المفروضة تامة برهاناً فنبحث عن الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = (4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy$$

نعلم من الدراسة النظرية أن:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \psi(y) = \int (4x^3y^3 - 2xy)dx + \psi(y) \Rightarrow$$

$$\underbrace{f(x,y) = x^4y^3 - x^2y + \psi(y)}_{(1)} \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^4y^2 - x^2 + \psi'(y)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)} \quad 3x^4y^2 - x^2 = 3x^4y^2 - x^2 + \psi'(y) \Rightarrow \psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = C$$

في الأخيرة C ثابت كيفي ودائماً نُعطيه القيمة صفر ومنه:

$$\psi(y) = 0$$

نعوض في(1) فنحصل على:

$$f(x,y) = x^4y^3 - x^2y$$

$$f(x,y) = C_1 \Rightarrow x^4y^3 - x^2y = C_1 \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

3) $(2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy = 0$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى التابع المجهول فيها هو y أما المتحول فهو x ولها الشكل الآتي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad ; \quad M(x,y) = 2x + 3y + 4 \quad , \quad N(x,y) = 3x + 4y + 5$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 4) = 3 \quad , \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x + 4y + 5) = 3$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

مما يعني أن المعادلة التفاضلية المفروضة تامة.

كون المعادلة المفروضة تامة برهاناً فنبحث عن الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون

$$d[f(x,y)] = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M(x,y)dx + N(x,y)dy = (2x + 3y + 4)dx + (3x + 4y + 5)dy$$

نعلم من الدراسة النظرية أن:

$$f(x,y)=\int M(x,y)dx+\psi(y)=\int(2x+3y+4)dx+\psi(y)\Rightarrow$$

$$\underbrace{f(x,y)=x^2+3xy+4x+\psi(y)}_{(1)}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x+\psi'(y)\quad\underbrace{\Rightarrow}_{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)}\quad 3x+4y+5=3x+\psi'(y)\Rightarrow$$

$$\psi'(y)=4y+5\quad\underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة بالنسبة لـِ } y}\quad\psi(y)=2y^2+5y$$

نعوض في(1) فنحصل على:

$$f(x,y)=x^2+3xy+4x+2y^2+5y$$

$$f(x,y)=C\quad\Rightarrow x^2+3xy+4x+2y^2+5y=C\quad;\quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

انتهت المحاضرة السابعة