٤.٣ د. هدى الشماط                                   2015 / 11 / 2

## التدحرج دون انزلاق والقاعدة والمتدحرج:

وجدنا أنه إذا ثبتنا في الجسم الصلب نقطة واحدة فإن الجسم يتحرك في كل لحظة بحركة دورانية حول محور سميناه بالمحور الآني للدوران. عندما ينتقل المحور في الفراغ المتماسك مع الجسم بحيث يبقى ماراً من النقطة الثابتة o. وبالتالي يجسم سطحاً مخروطياً رأسه o يدعى المخروط المتدحرج، وعندما ينتقل في الفراغ الثابت ماراً أيضاً من نقطة o بالتالي يجسم في هذا الفراغ سطحاً مخروطياً رأسه o يدعى بمخروط القاعدة

أي **القاعدة:** هي المحل الهندسي للمحور الآني يدور في جملة ثابتة.

و**المتدحرج:** هو 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 متماسكة مع الجسم.

ويشترك المخروطان في كل لحظة بمولد مشترك مار من o جميع نقاطه ممثلة هو المحور الآني.

وبالتالي تتم الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة بتدحرج المخروط المتدحرج (متماسك مع الجسم) دون انزلاق على سطح المخروط القاعدة (ثابت في الفراغ).

## الدراسة التحليلية:

★ تعيين زوايا أولر $\psi, \theta, \varphi$ على الترتيب:

لتكن $ox_1y_1z_1$ جملة المحاور الأصلية الثابتة ولتكن $oxyz$ الجملة المتحركة التي تشترك مع الجملة الثابتة بالنقطة o وليكن $\vec{ou}$ الفصل المشترك بين المستويين $xy$ ، $x_1y_1$ نسمي الزاوية بين الفصل المشترك $\vec{ou}$ والمحور الثابت $ox_1$ بـ $\psi$ ~~[illegible]~~ والتي تقع في المستوي $x_1y_1$ والزاوية بين المحورين $oz_1$ و $oz$ تدعى بـ $\theta$ وتقع في المستوي $zz_1$ العامودي على الفصل المشترك $\vec{ou}$ وتسمى الزاوية بين $\vec{ou}$ والمحور $ox$ بـ $\varphi$ والتي تقع في المستوي $xy$ . أي أن $\theta$ هي زاوية بين المستويين $xoy$ و $x_1oy_1$ .

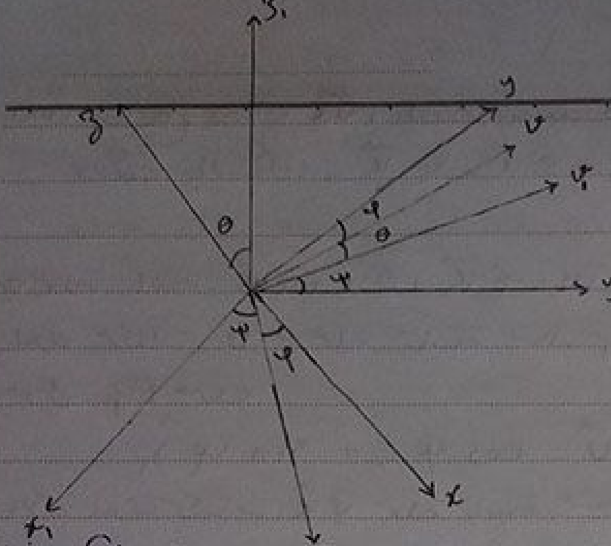
تدعى هذه الزوايا بـ زوايا أولر.

لنفرض أن الجملة $oxyz$ كانت في لحظة البدء منطبقة على الجملة $ox_1y_1z_1$. ولنثبت أن دوران بهذه الزوايا هي كافية لنقل جملة $oxyz$ من موضع الانطباق إلى موضع جديد.

إذا دورنا جملة $oxyz$ أولاً حول $oz_1$ بزاوية قدرها $\psi$ فينطبق المحور $ox$ على $\vec{ou}$ ويحافظ $oz_1$ على موضعه وينطبق المحور $oy$ على محور $\vec{ov_1}$ العامود على $\vec{ou}$ ويقع في المستوي $x_1y_1$ ثم ندور الجملة الناتجة حول المحور $\vec{ou}$ بمقدار زاوية $\theta$ فينطبق $oz_1$ على $oz$ ويبقى $\vec{ou}$ على حاله وينطبق $\vec{ov_1}$ على محور جديد ندعوه $\vec{ov}$ ثم ندور الجملة حول محور $oz$ بمقدار الزاوية $\varphi$ فيحافظ $oz$ على موضعه وينطبق $\vec{ou}$ على $\vec{ox}$ وبالتالي ينطبق $\vec{ov}$ على المحور $\vec{oy}$ الذي يتم الثلاثي $xyz$ وبذلك نكون قد انتقلنا من جملة $ox_1y_1z_1$ إلى $oxyz$ بثلاث دورانات متتالية ... (غير مطلوب)

نلخص ما سبق بالجدول التالي:

$$ox_1y_1z_1 \xrightarrow[\text{بزاوية } \psi]{\text{دوران حول } oz_1} ouv_1z_1 \xrightarrow[\text{بزاوية } \theta]{\text{دوران حول } ou} ouvz \xrightarrow[\text{بزاوية } \varphi]{\text{دوران حول } oz} oxyz$$



/ /

ملاحظ:

$v_1 \perp u$ في المستوى $x_1 y_1$.

$v \perp u$ " " $x, y$

$u$ هو فصل مشترك للمستويين $ox_1y_1$ و $oxy$

وعليا $\psi(x_1 \hat{,} u)$ , $\theta(z \hat{,} z_1)$.

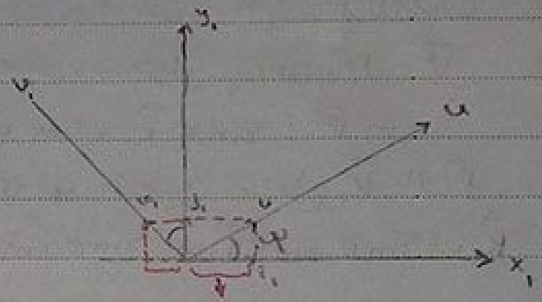
$\varphi(u \hat{,} x)$

زوايا أولر ...

* لتعيين مركبات متجهات الواحدة $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}$ للمحاور $x, y, z$ على المحاور $x, y, z_1$ أو بالعكس نستخدم مصفوفات تحويل الثلاث التالية :- مصفوفات التحويل -

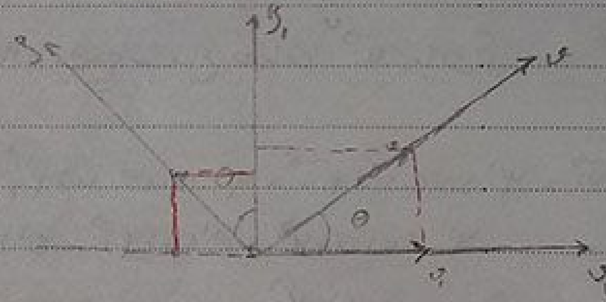
دوران بزاوية $\psi$ أي من $ox_1y_1z_1 \to ouv_1z_1$ ، $i_1 j_1 k_1 \to u v_1 k_1$

| $D_\psi =$ | $\vec{u}$ | $\vec{v}_1$ | $\vec{k}_1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{i}_1$ | $\cos\psi$ | $-\sin\psi$ | 0 | $\to i_1 \perp k_1$ |
| $\vec{j}_1$ | $\sin\psi$ | $\cos\psi$ | 0 | $\to j_1 \perp k_1$ |
| $\vec{k}_1$ | 0 | 0 | 1 | |
| | $u \perp k_1$ | $v_1 \perp k_1$ | | |



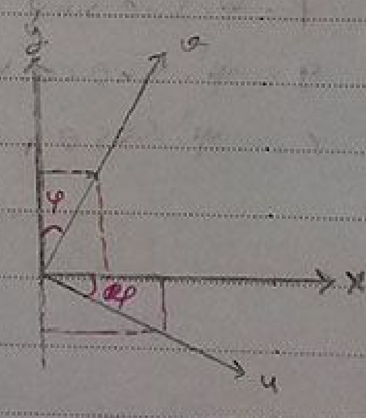
دوران بزاوية $\theta$ أي الانتقال من $ouv_1z_1 \to ouvz$ ، $uv_1k_1 \to uvk$

| $D_\theta =$ | $\vec{u}$ | $\vec{v}$ ($u \perp v$) | $\vec{k}$ ($u \perp k$) |
|---|---|---|---|
| $\vec{u}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\vec{v}_1$ | 0 ($u \perp v_1$) | $\cos\theta$ | $-\sin\theta$ |
| $\vec{k}_1$ | 0 ($k \perp u$) | $\sin\theta$ | $\cos\theta$ |



دوران بزاوية $\varphi$ أي الانتقال من $ouvz \to oxyz$ ، $uvk \to ijk$

| $D_\varphi =$ | $\vec{i}$ | $\vec{j}$ | $\vec{k}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\vec{u}$ | $\cos\varphi$ | $-\sin\varphi$ | 0 | $u \perp k$ |
| $\vec{v}$ | $\sin\varphi$ | $\cos\varphi$ | 0 | $v \perp k$ |
| $\vec{k}$ | 0 | 0 | 1 | $\vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ |
| | $i \perp k$ | $j \perp k$ | | |



إعداد: ريم الرجبي (فقط هذه مطلوبة من نظري للامتحان) / /

تعيين شعاع الدوران $\vec{\omega}$: نلاحظ بسبب دوران زوايا أولر فإن شعاع الدوران يملك ثلاث مركبات ويكتب بالشكل: $\vec{\omega} = \psi'\vec{K}_1 + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{K}$ نلاحظ أن شعاع دوران ليس كله في جملة ثابتة وليس كله في جملة متحركة لذلك نرى كيف يكتب في جملة ثابتة أو في جملة متحركة.

في جملة ثابتة: $\omega = \psi'\vec{K}_1 + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{K}$

لنرى مركبات $u$ في جملة ثابتة نستخدم مصفوفة تحويل $D_\psi$ فنرى

$$\vec{u} = \cos\psi\,\vec{i}_1 + \sin\psi\,\vec{j}_1$$

والآن لنرى مركبات $\vec{K}$ في جملة ثابتة. نستخدم مصفوفة تحويل $D_\theta$

$$\vec{K} = -\sin\theta\,\vec{v}_1 + \cos\theta\,\vec{K}_1 \quad --*$$

لكن $v_1$ ليست في جملة ثابتة لذلك فإننا نستخدم مصفوفة تحويل $D_\psi$ من أجل $\vec{v}_1$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = -\sin\psi\,\vec{i}_1 + \cos\psi\,\vec{j}_1$$

نعوضها في * فيصبح شعاع $\vec{K}$ بالشكل:

$$\vec{K} = \sin\theta.\sin\psi\,\vec{i}_1 - \sin\theta.\cos\psi\,\vec{j}_1 + \cos\theta.\vec{K}_1$$

وبالتالي يصبح شعاع دوران $\vec{\omega}$ بالشكل:

$$\vec{\omega} = \psi'.\vec{K}_1 + \theta'\cos\psi\,\vec{i}_1 + \theta'.\sin\psi\,\vec{j}_1 + \varphi'.\sin\theta.\sin\psi\,\vec{i}_1 - \varphi'.\sin\theta.\cos\psi\,\vec{j}_1 + \varphi'\cos\theta.\vec{K}_1$$

ومنه مركبات $\vec{\omega}$ في جملة ثابتة:

$$p_1 = \varphi'.\sin\theta.\sin\psi + \theta'\cos\psi$$

$$q_1 = -\varphi'.\sin\theta.\cos\psi + \theta'\sin\psi$$

$$r_1 = \varphi'.\cos\theta + \psi'$$

في جملة متحركة: $\omega = \psi'\vec{K}_1 + \theta'\vec{u} + \varphi'\vec{K}$

لنرى مركبات $u$ في جملة متحركة نستخدم مصفوفة تحويل $D_\varphi$ فنرى

$$u = \cos\varphi\,\vec{i} - \sin\varphi\,\vec{j}$$

والآن لنرى مركبات $\vec{K}_1$ في جملة متحركة نستخدم مصفوفة تحويل $D_\theta$.

$$\vec{K}_1 = \sin\theta.\vec{v} + \cos\theta.\vec{K} \quad --*$$

لكن $v$ ليست في جملة المتحركة لذلك فإننا نستخدم مصفوفة تحويل $D_\varphi$ من أجل $\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

نعوضها في * فيصبح شعاع $\vec{K}_1$ بالشكل:

$$\vec{K}_1 = \sin\theta.\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta.\cos\varphi\,\vec{j} + \cos\theta.\vec{K}$$

وبالتالي يصبح شعاع دوران $\vec{\omega}$ بالشكل:

$$\vec{\omega} = \psi'.\sin\theta.\sin\varphi\,\vec{i} + \psi'.\sin\theta.\cos\varphi\,\vec{j} + \psi'\cos\theta.\vec{K} + \theta'\cos\varphi\,\vec{i} - \theta'\sin\varphi\,\vec{j} + \varphi'\vec{K}$$

ومنه مركبات $\vec{\omega}$ في جملة متحركة:

$$p = \psi'.\sin\theta.\sin\varphi + \theta'\cos\varphi$$

$$q = \psi'.\sin\theta\cos\varphi - \theta'\sin\varphi$$

$$r = \psi'\cos\theta + \varphi'$$

د.هدى م٢ 2015 / 11 / 4

توزيع السرع: تحادة حركة دورانية حول نقطة ثابتة إلى حركة دورانية حول محور ثابت.

$$\forall M \in S, \quad \vec{V}(M) = \vec{\omega}_M \wedge \vec{OM}$$

آني — نقطة ثابتة.

مبرهنة: إن شعاع الدوران الآني لا يتعلق بالنقطة M.

البرهان:

$$\forall A, B \in S, \quad \vec{V}(A) = \vec{\omega}_A \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{V}(B) = \vec{\omega}_B \wedge \vec{OB}$$ بما أن نقطتين من نفس جسم

نطبق نظرية المساقط على A, B.

$$\vec{V}(A) \cdot \vec{AB} = \vec{V}(B) \cdot \vec{AB}$$

$$(\vec{\omega}_A \wedge \vec{OA}) \cdot \vec{AB} = (\vec{\omega}_B \wedge \vec{OB}) \cdot \vec{AB}$$

$$(\vec{\omega}_A, \vec{OA}, \vec{AB}) = (\vec{\omega}_B, \vec{OB}, \vec{AB})$$ نبدل ترتيب

$$(\vec{OA}, \vec{AB}, \vec{\omega}_A) = (\vec{OB}, \vec{AB}, \vec{\omega}_B)$$

$$(\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_A = (\vec{OB} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_B$$ إذا دخلنا B إلى قوس أول

$$\Rightarrow [(\vec{OB} \wedge \vec{AB}) + \underbrace{(\vec{BA} \wedge \vec{AB})}_{0}] \cdot \vec{\omega}_A = (\vec{OB} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_B$$

$$(\vec{OB} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_A = (\vec{OB} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_B$$

$$\vec{C} \cdot \vec{\omega}_A = \vec{C} \cdot \vec{\omega}_B$$ فإن $\omega_A \parallel \omega_B$

$$\omega_A = \omega_B = \vec{\omega}$$ بما أن

$\vec{\omega}$ شعاع متغير في وبالتالي $\varepsilon$ غير ثابتة

وبالتالي فإن مركبة سرعة نقطة M تعطى بالعلاقة:

$$\forall M \in S, \quad \vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

شعاع دوران آني — نقطة ثابتة.

توزيع التسارعات:

$$\forall M \in S, \quad \vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \, \vec{mM}$$

شعاع تسارع زاوي — مسقط M على محور الدوران الآني

الدراسة تحليلية:

$$\vec{\varepsilon} = (p_1', q_1', r_1')$$ في ثابتة

حيث $(p_1, q_1, r_1)$ مركبات شعاع دوران في جملة ثابتة.

مبرهنة: $$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k})$$ على متحركة.

حيث $(p, q, r)$ مركبات شعاع دوران الآني في جملة متحركة.

البرهان:

علماً أنه في جزء كهذا لا يجوز الاشتقاق في جملة متماسكة

$$\vec{\varepsilon} = p'.\vec{i} + p.\vec{i}' + q'.\vec{j} + q.\vec{j}' + r'.\vec{k} + r.\vec{k}'$$

$$= p'\vec{i} + p(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + q'.\vec{j} + q(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + r'.\vec{k} + r(\vec{\omega}\wedge\vec{k})$$

$$= p'\vec{i} + q'.\vec{j} + r'.\vec{k} + \vec{\omega}\wedge(\underbrace{p\vec{i} + q\vec{j} + r.\vec{k}}_{\vec{\omega}})$$

$$= p'\vec{i} + q'\vec{j} + r'.\vec{k} + 0$$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon} = (p', q', r')$$

★ أثبت أن شعاع التسارع الزاوي في جملة متماسكة يساوي إلى مشتق مركبات شعاع دوران الأخير.

السرعة والتسارع خطياً (متماسكة والثابتة):

ثابتة:

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

$$= \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}(M) = (q_1 z_1 - r_1 y_1)\vec{i}_1 + (r_1 x_1 - p_1 z_1)\vec{j}_1 + (p_1 y_1 - q_1 x_1)\vec{k}_1$$

مركبات سرعة في جملة ثابتة أو جملة متحركة.

متحركة:

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (pz - rx)\vec{k}$$

ثابتة:

$$\Gamma(M) = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ p'_1 & q'_1 & r'_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ v_{x_1}(M) & v_{y_1}(M) & v_{z_1}(M) \end{vmatrix}$$

أو يمكن بالاشتقاق مباشر لـ $V(M)$.

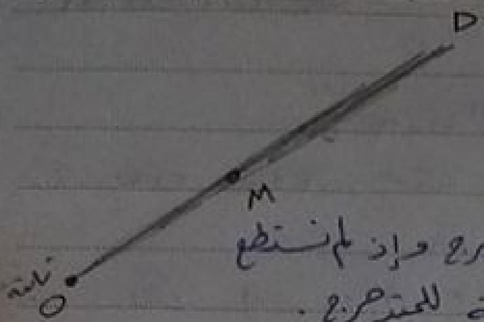
متحركة:

$$\Gamma(M) = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM} + \vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ p' & q' & r' \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ v_x(M) & v_y(M) & v_z(M) \end{vmatrix}$$

/ /

تعيين المحل الهندسي لمحور الآني للدوران تحليليا :




$\forall M \in \Delta \quad , \vec{OM} \parallel \vec{\omega}$.

في جملة المتماسكة :

ينتج منها معادلتين ← $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$.

بحذف زمن من معادلتين تنتج معادلة ديكارتية للمتدحرج وإذ لم نستطع حذف زمن نقول عن المعادلات بأنه المعادلات الوسيطية للمتدحرج.

أما في جملة المتماسكة :

$\frac{x_1}{p} = \frac{y_1}{q} = \frac{z_1}{r}$ ← تنتج معادلتين

بحذف الزمن نحصل على معادلات ديكارتية للقاعدة أ.د إذا لم نستطع حذف زمن فإننا نحصل على معادلات الوسيطية

تمرين :

صفيحة بشكل مثلث متساوي ساقين OAB وقائم زاوية في A طول ضلعيه قائم هو 2

بفرض أن صفيحة تدور حول رأسها ثابت O بحيث ~~يبقى~~ يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي ثابت $Oxy$

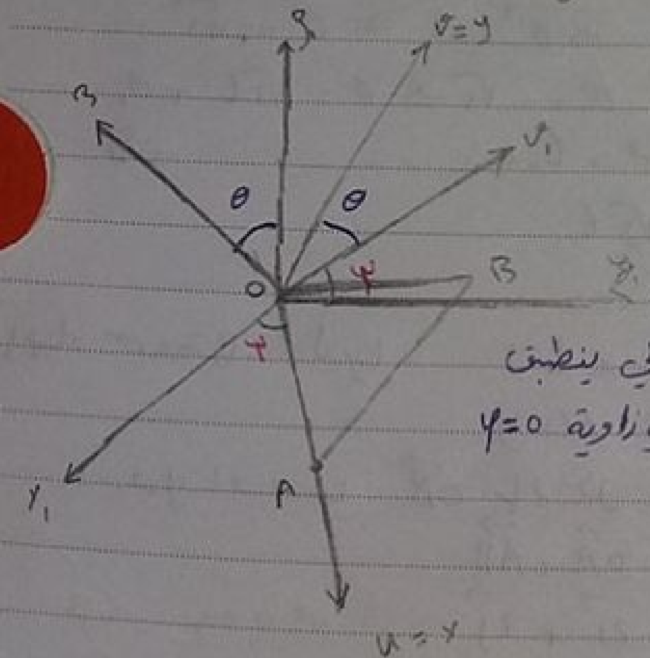
المطلوب : 1- عين شعاع دوران الآني في جملتين. أساس محور ?? وقاعدة.

2- " معادلات حركة الصفيحة وسرعة رأس B من صفيحة وذلك بفرض أن.

على مستوى (4) ... $|\vec{V}(A)| = 2 \quad , \quad |\vec{\omega}| = 2$

الحل : ضلع OA ملازم للمستوي $Ox_1y_1$ أي أننا قيدنا حركة جسم وبالتالي تم تقييد وسطائها ثلاثة وبالتالي يصبح لدينا وسيطين ... زوايا أولر نقص و ينطبق $\vec{OA}$ على Ox وبالتالي

تقدم $\varphi$. ونبحث $\theta$ و $\psi$ و أيضاً الطبيق $V$ على $y$ لكون $U$ ، ينطبق على $x$.




نختار جملة محاور الثابتة $Ox_1y_1z_1$ وجملة محاور متماسكة مع جسم $Oxyz$ بما أن الحركة دورانية حول نقطة ثابتة فلدينا 3 وسطاء للحركة (زوايا أولر $\varphi, \theta, \psi$) ولكن $OA$ ملازم لمستوي $Ox_1y_1$ فإن عدد وسطاء الحركة تصبح $2(\psi, \theta)$

لكن $OA$ ضلع من متماسكة ويبقى في ثابتة وبالتالي ينطبق المحور $Ox$ على فصل مشترك $\vec{Ou}$ وبالتالي زاوية $\varphi = 0$

فوسطاء الحركة هي $(\psi, \theta)$.

-1- $\vec{\omega} = \psi' \vec{K_1} + \theta' \vec{u} + \varphi' \vec{K}$ معدوم

$= \psi' \vec{K_1} + \theta' \vec{i}$ متماسكة

بالإسقاط على جملة متماسكة : 1

$\vec{K_1} = \cos\theta \vec{K} + \sin\theta \vec{J}$

شعاع دوران في جملة متحركة $\Rightarrow \vec{\omega} = \theta' \vec{i} + \psi' \sin\theta \vec{j} + \psi' \cos\theta \vec{K}$.

/ /

أما على الثابتة:

$$\vec{\omega} = \varphi'\vec{K_1} + \theta'\vec{i}$$

مركبة $\vec{\omega}$ في جملة ثابتة $= \theta'\cos\varphi\,\vec{i_1} + \theta'\sin\varphi\,\vec{j_1}$

-2- تعين معادلات حركة وفق شروط $|\vec{V}(A)| = 2$ ، $|\vec{\omega}| = 2$

$$\vec{V}(A) = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$$

لكن $A(2,0,0)$ في جملة متماسكة:

$$V(A) = \begin{vmatrix} i & j & K \\ \theta' & \varphi'\sin\theta & \varphi'\cos\theta \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\varphi'\cos\theta\,\vec{j} - 2\varphi'\sin\theta\,\vec{K}$$

$$\Rightarrow (\vec{V}(A))^2 = 4\varphi'^2\cos^2\theta + 4\varphi'\cos^2\theta$$

$$4 = 4\varphi'^2 \Rightarrow \varphi'^2 = 1 \Rightarrow \varphi' = \mp 1$$

(-1) مرفوض و (+1) مقبول لأن فرضاً دوران موجب.

$$\Rightarrow \varphi' = +1 \Rightarrow \varphi = t + \varphi_0$$

لكن فرضاً $\varphi = t = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = t}$$

ولدينا $\vec{\omega} = \varphi'\vec{K} + \theta'\vec{i} \Rightarrow \omega^2 = \varphi'^2 + \theta'^2$

$$\Rightarrow 4 = 1 + \theta'^2$$

$$\Rightarrow \theta'^2 = 3 \Rightarrow \theta' = \mp\sqrt{3}$$

$$\theta' = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \sqrt{3}t + \theta_0$$

لكن فرضاً $\theta = t = 0 \Leftarrow \theta_0 = 0$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{3}t$$

إيجاد سرعة B. لدينا $x \perp y$ و $OA \perp OB$

$$\Rightarrow AB \parallel Oy$$

وإذا أوضحنا $\vec{OB}$ بالشكل

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$$

$$2\vec{i} + 2\vec{j}$$

لأن $AB \parallel Oy$

ولأن $OA = AB$ في مثلث قائم ومتساوي الساقين

$\vec{OB} = (2,0,0)$ على متماسكة.

إعداد: ريم الوصبي.

/ /

$$\vec{V}(\sqrt{3}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{3} & \sin\sqrt{3}t & \cos\sqrt{3}t \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}(\sqrt{3}) = -2\cos\sqrt{3}t\,\vec{i} + 2\cos\sqrt{3}t\,\vec{j} + (2\sqrt{3} - 2\sin\sqrt{3}t)\vec{k}$$