



اقرأ وارثق

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

المعادلات التفاضلية (1)

المحاضرة الثالثة

تاريخ المحاضرة: 12/10/2015

مدرس المقرر: د. خليل يحيى

الفقرة الثالثة: المعادلات التفاضلية المتجانسة وطريقة إيجاد الحل العام لها.

تعريف: لتكن f دالة بمتحولين x, y قاعدة ربطها $f(x, y)$ عندئذ نقول عن الدالة f أنها متجانسة من الدرجة n إذا تحقق:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \quad ; \quad \lambda \neq 0 \text{ عدد حقيقي}$$

- إذا كانت $n = 0$ فنقول عن الدالة f أنها متجانسة من الدرجة صفر "أو اختصاراً متجانسة"

مثال: لتكن f دالة بمتحولين x, y معرفة بقاعدة الربط الآتية

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + 2(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + 2\lambda^2 xy$$

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + 2xy) = \lambda^2 f(x, y) \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

الدالة f المفروضة متجانسة من الدرجة $n = 2$.

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية $y' = f(x, y)$ أنها متجانسة إذا كانت الدالة f متجانسة.

- بفرض أن المعادلة التفاضلية

$$y' = f(x, y)$$

متجانسة عندئذ لإيجاد الحل العام لها نقوم بردها إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات وذلك بإجراء تغيير في التابع y من الشكل:

$$z = \frac{y}{x} \quad ; \quad z = z(x) \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz'$$

نعوض كل ما سبق بالمعادلة التفاضلية المفروضة لنحصل على معادلة تفاضلية جديدة بالتابع z والمتحول x وهذه المعادلة تتميز بأنها قابلة لفصل المتحولات وبالتالي نقوم بفصل متحولاتها ومن ثم نوجد الحل العام لها وأخيراً نعود للتابع القديم لنحصل على الحل العام للمعادلة المفروضة.

مثال على الفقرة الثالثة: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية التابع المجهول فيها هو y والمتحول هو x وهي من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ولها الشكل الآتي:

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

من الملاحظ أن:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{\lambda(x + y)}{\lambda(x - y)} \stackrel{\substack{\text{نقسم على } \lambda \\ \lambda \neq 0}}{=} \frac{x + y}{x - y} = f(x, y)$$

إن الدالة f متجانسة ومنه المعادلة التفاضلية المفروضة متجانسة.

لإيجاد الحل العام لها نجري تغييراً في التابع y من الشكل:

$$z = \frac{y}{x} \quad ; \quad z = z(x) \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \quad \text{بالاشتقاق}$$

نعوض عبارة y وعبارة y' السابقتين في المعادلة المفروضة فنحصل على:

$$z + xz' = \frac{x + xz}{x - xz} \Rightarrow z + xz' = \frac{1 + z}{1 - z}$$

في الطرف الأيمن
نقسم البسط والمقام على x
وذلك يفرض أن $x \neq 0$

$$\Rightarrow xz' = \frac{1 + z}{1 - z} - z \Rightarrow xz' = \frac{1 + z - z + z^2}{1 - z} \Rightarrow xz' = \frac{1 + z^2}{1 - z} \Rightarrow x \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

والمعادلة * هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو z أما المتحول فهو x وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1 - z}{1 + z^2} dz \Rightarrow \frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{1 + z^2} - \frac{z}{1 + z^2} \right) dz \Rightarrow$$

بفصل (عزل) المتحولات بالمكاملة

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{1 + z^2} dz - \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1 + z^2} dz \Rightarrow$$

$$\ln|x| + \ln|C| = \arctan(z) - \frac{1}{2} \ln(1 + z^2) \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية * ، وبالعودة للتابع القديم أي بتعويض $z = \frac{y}{x}$

فيما سبق نحصل على:

$$\ln|x| + \ln|C| = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda \neq \frac{c}{c_1}$$

$$\frac{a}{a_1} = \lambda \Rightarrow a = a_1\lambda , \quad \frac{b}{b_1} = \lambda \Rightarrow b = b_1\lambda$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المدروسة (1) فنجد أنها تأخذ الشكل:

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (2)$$

نجري تغييراً في التابع y من الشكل:

$$z = a_1x + b_1y \quad ; \quad z = z(x)$$

نفاضل المساواة الأخيرة بالنسبة للمتحول x فنحصل على:

$$dz = a_1dx + b_1dy \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow$$

تقسم على dx (2) بالاستفادة من المعادلة التفاضلية ومن التحويل

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{\lambda z + c}{z + c_1}\right) \quad (3)$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو z أما المتحول فهو x وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$dx = \frac{dz}{a_1 + b_1 f\left(\frac{\lambda z + c}{z + c_1}\right)} \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{dz}{a_1 + b_1 f\left(\frac{\lambda z + c}{z + c_1}\right)} + C ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

بالمكاملة

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (3) ، وإذا عدنا للتابع القديم y نجد الحل العام للمعادلة التفاضلية (2) والذي يكون نفسه الحل العام للمعادلة التفاضلية المدروسة (1) في هذه الحالة.

الحالة الثالثة: إذا كان المستقيمان

$$D_1 : ax + by + c = 0 \quad , \quad D_2 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

غير متوازيين أي أن:

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$$

فعدنئذٍ فإن المستقيمين D_1, D_2 متقاطعين وبالتالي لهما نقطة تقاطع نحصل عليها من الحل المشترك للمعادلتين

$$ax + by + c = 0$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

لنفرض أن (α, β) هي نقطة التقاطع لهذين المستقيمين بعد ذلك نجري التحويلين

$$x = X + \alpha \quad \text{"تغيير في المتحول } x \text{"}$$

$$y = Y + \beta \quad ; \quad Y = Y(x) \quad \text{"تغيير في التابع } y \text{"}$$

بعد الاشتقاق والتعويض في المعادلة التفاضلية المدروسة (1) سوف نحصل على معادلة تفاضلية عادية

التابع المجهول فيها هو Y والمتحول هو x ، وتتميز هذه المعادلة بأنها متجانسة.

كون المعادلة الناتجة متجانسة فنجري تغييراً في التابع Y من الشكل:

$$Z = \frac{Y}{x} \quad ; \quad Z = Z(x)$$

بعد الاشتقاق والتعويض في المعادلة التفاضلية المتجانسة سوف نحصل على معادلة تفاضلية التابع المجهول

فيها هو Z والمتحول هو x وتتميز بأنها قابلة لفصل المتحولات ومن هنا نوجد الحل العام لها ونعود للتابع Y

لنحصل على الحل العام للمتجانسة ثم نعود للتابع القديم y لنحصل على الحل العام للمعادلة (1) المدروسة.

مثال على الفقرة الرابعة: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x + y + 1)dx - (2x + 2y + 2)dy = 0$$

الحل: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية التابع المجهول فيها هو y والمتحول هو x وهي من

المرتبة الأولى والدرجة الأولى وتكتب بالشكل:

$$(2x + 2y + 2)dy = (x + y + 1)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x + 2y + 2}$$

من الملاحظ أن المعادلة السابقة تدرج ضمن الحالة الأولى من الفقرة الرابعة.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2(x + y + 1)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

بالمكاملة

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

أمثلة وظيفية: أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية

$$1) \quad y' = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad 2) \quad 2xy \cdot y' = x^2 + y^2 \quad , \quad 3) \quad y' = \frac{3x - y + 5}{x + y - 1}$$

$$4) \quad (x - y + 1)dx + (x - y + 2)dy = 0 \quad , \quad 5) \quad (x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

سوف أقوم بإدراج حل الوظيفة في المحاضرة القادمة فأتمنى المحاولة وحلها "انتهت المحاضرة الثالثة"