WWW.facebook.com/primavira33

جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

البنى الجبرية (1)

المحاضرة الثانية

تاريخ المحاضرة: 13/10/2015

مدرس المقرر: د. حمزة الحاكي

مكتبة بريما فيرا – مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

تمهيدية: لتكن P مجموعة ما لا تساوي الخالية ، ولنفرض أن θ , $\sum$ تجزئتين للمجموعة P ، وأن ρ_θ , $\rho_\sum$ علاقتين التكافؤ الناتجتين عن التجزئتين θ , $\sum$ على الترتيب عندئذٍ:

$$\rho_\sum = \rho_\theta \Leftrightarrow \sum = \theta$$

فرضيات التمهيدية:

لنفرض أن $P \neq \phi$ ، وأن $\sum$ تجزئة للمجموعة P بالتالي "بحسب المبرهنة في المحاضرة السابقة"

فإن العلاقة $\rho_\sum$ المعرفة بالشكل:

$$\underbrace{\forall\, a,b \in P \;\; ; \;\; a\,\rho_\sum\, b \Leftrightarrow \exists\, A \in \sum : \;\; a,b \in A}_{(1)}$$

هي علاقة تكافؤ على P.

وأيضاً لنفرض أن θ تجزئة للمجموعة P بالتالي "بحسب نفس المبرهنة" فإن العلاقة ρ_θ المعرفة بالشكل:

$$\underbrace{\forall\, a,b \in P \;\; ; \;\; a\,\rho_\theta\, b \Leftrightarrow \exists\, B \in \theta : \;\; a,b \in B}_{(2)}$$

هي علاقة تكافؤ على P.

طلب التمهيدية: لنثبت أن

$$\rho_\sum = \rho_\theta \Leftrightarrow \sum = \theta$$

البرهان:

$\Leftarrow$ لنفرض أن $\sum = \theta$ و لنثبت أن $\rho_\sum = \rho_\theta$.

لنأخذ عنصر كيفي $(a,b) \in \rho_\sum$ عندئذٍ $a\,\rho_\sum\, b$ وبحسب (1):

$$\exists\, A \in \sum : \;\; a,b \in A$$

وبما أن $\sum = \theta$ فنجد من الأخيرة أنهُ:

$$\exists\, A \in \theta : \;\; a,b \in A$$

وبحسب (2) يكون $a\,\rho_\theta\, b$.

أخذنا عنصر كيفي $(a,b) \in \rho_\sum$ ووجدنا أن $(a,b) \in \rho_\theta$ وهذا يعني أن:

$$\underbrace{\rho_\sum \subseteq \rho_\theta}_{(1)}$$

بطريقة مشابهة تماماً لما سبق نجد أن

$$\underbrace{\rho_\theta \subseteq \rho_\sum}_{(2)}$$

من (1) و (2) نجد أن $\rho_\Sigma = \rho_\theta$.

$\Rightarrow$ لنفرض أن $\rho_\Sigma = \rho_\theta$ ولنثبت أن $\Sigma = \theta$.

$$\underbrace{\sum}_{\text{التجزئة الناتجة عن علاقة التكافؤ } \rho_\Sigma} = P/\rho_\Sigma \underbrace{=}_{\text{بالاستفادة من الفرض}} P/\rho_\theta = \underbrace{\theta}_{\text{التجزئة الناتجة عن علاقة التكافؤ } \rho_\theta} \Rightarrow \Sigma = \theta$$

وهو المطلوب

مبرهنة: لتكن P مجموعة ما لا تساوي الخالية ، ولنفرض أن $\mathcal{L}$ أسرة جميع علاقات التكافؤ المعرفة على P ، ولنفرض أن $\mathcal{L}_0$ أسرة كُل التجزئات المعرفة على P. عندئذٍ يوجد تطبيق تقابل (متباين وغامر) بين $\mathcal{L}_0$ و $\mathcal{L}$.

البرهان: لنعرف العلاقة

$$f: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}_0$$

بالشكل:

$$f(\rho) = P/\rho \quad ; \quad \forall \rho \in \mathcal{L}$$

أي أن العلاقة التي قمنا بتعريفها تربط كُل علاقة تكافؤ ρ على P بـ P/ρ مجموعة كُل صفوف تكافؤ العلاقة ρ **" تذكر من المحاضرة الأولى وبالأخص التمهيدية الثانية أن P/ρ تشكل تجزئة للمجموعة P أي $P/\rho \in \mathcal{L}_0$ "**

- لنثبت أن العلاقة f تمثل تطبيق.

لنأخذ عنصرين كيفيين $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}$ بحيث أن $\rho_1 = \rho_2$.

$$f(\rho_1) = P/\rho_1 \underbrace{=}_{\text{استناداً للفرض}} P/\rho_2 = f(\rho_2)$$

أخذنا عنصرين كيفيين $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}$ بحيث أن $\rho_1 = \rho_2$ ووجدنا أن $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ وبالتالي العلاقة f هي تطبيق.

- لنثبت أن التطبيق f متباين.

لنأخذ عنصرين كيفيين $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}$ بحيث أن $f(\rho_1) = f(\rho_2)$.

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) \Rightarrow P/\rho_1 = P/\rho_2 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بحسب} \\ \text{التمهيدية السابقة}}} \rho_1 = \rho_2$$

أخذنا عنصرين كيفيين $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}$ بحيث أن $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ ووجدنا أن $\rho_1 = \rho_2$ وبالتالي التطبيق f متباين.

- لنأخذ عنصر كيفي $\sum \in \mathcal{L}_0$ عندئذٍ بحسب تعريف عناصر المجموعة $\mathcal{L}_0$ فإن $\sum$ تجزئة للمجموعة P وبالتالي بحسب " المبرهنة من المحاضرة السابقة " فإنهُ يوجد علاقة تكافؤ $\rho_\sum$ معرفة على المجموعة P أي يوجد عنصر $\rho_\sum \in \mathcal{L}$ والأكثر من ذلك:

$$f(\rho_\sum) \underset{\text{ربط } f}{\overset{\text{من قاعدة}}{=}} P/\rho_\sum = \sum$$

أخذنا عنصر كيفي $\sum \in \mathcal{L}_0$ ووجدنا عنصر $\rho_\sum \in \mathcal{L}$ بحيث أن:

$$f(\rho_\sum) = \sum$$

وهذا يعني أن التطبيق f غامر.

من كل ما سبق نستنتج أن العلاقة f التي قمنا بتعريفها هي تطبيق وهذا التطبيق متباين وغامر أي هو تقابل.

وهو المطلوب

علاقـــات الترتيب الجزئي

تعريف: لتكن P مجموعة ما غير خالية $(P \neq \phi)$ ولتكن ρ علاقة ثنائية معرفة على P عندئذٍ نقول عن ρ أنها علاقة ترتيب جزئي على P إذا كانت ρ علاقة انعكاسية و تخالفية و متعدية.

نرمز عادةً لعلاقة الترتيب الجزئي بالرمز $\leq$ أي أنهُ من أجل أي عنصرين $a, b \in P$ فإن:

$$(a,b) \in \rho \underset{\text{ترميز}}{\overset{\text{كتب}}{\Leftrightarrow}} a \leq b \Leftrightarrow \begin{matrix} a < b \\ \text{أو} \\ a = b \end{matrix}$$

نسمي الثنائية $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

مثال(1): إن علاقة أصغر أو يساوي " $\leq$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة $P = \mathbb{Z}$ هي علاقة ترتيب جزئي أي أن $(\mathbb{Z}, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وسبب ذلك هو:

- $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = a \Rightarrow a \leq a$ والعلاقة " $\leq$ " انعكاسية
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad ; \quad a \leq b \ , \ b \leq a \Rightarrow a = b$ والعلاقة " $\leq$ " تخالفية
- $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \ ; a \leq b \ , \ b \leq c \Rightarrow a \leq c$ والعلاقة " $\leq$ " متعدية

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

مثال(2): لتكن L مجموعة ما لا تساوي الخالية ، $\sum$ أسرة من المجموعات الجزئية من L ، ولنعرف على $\sum$

العلاقة " $\subseteq$ " (علاقة الاحتواء)(احتواء أو مساواة).

$$\forall A,B \in \sum \quad , \quad A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{matrix} A \subsetneq B \\ \text{أو} \\ A = B \end{matrix}$$

برهن أن العلاقة " $\subseteq$ " هي علاقة ترتيب جزئي على $\sum$ أي أن $(\sum \ , \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

البرهان:

- $\forall A \in \sum \underbrace{\Rightarrow}_{\text{أي مجموعة تساوي نفسها}} A = A \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب تعريف العلاقة } \subseteq} A \subseteq A$ والعلاقة " $\subseteq$ " انعكاسية
- $\forall A,B \in \sum \ ; \ A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \Rightarrow A = B$ والعلاقة " $\subseteq$ " تخالفية
- $\forall A,B,C \in \sum \ ; \ A \subseteq B \ , \ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ والعلاقة " $\subseteq$ " متعدية

مما سبق نستنتج أن العلاقة " $\subseteq$ " هي علاقة ترتيب جزئي على $\sum$.

مبرهنة: لتكن P مجموعة ما لا تساوي الخالية ، ولتكن $\leq$ علاقة انعكاسية ومتعدية معرفة على P عندئذٍ

1- العلاقة ρ المعرفة على P بالشكل الآتي:

$$\forall a,b \in P \quad , \quad a \rho b \Leftrightarrow a \leq b \ , \ b \leq a$$

هي علاقة تكافؤ على المجموعة P.

2- العلاقة $\leq$ المعرفة على المجموعة P/ρ بالشكل الآتي:

$$\forall \overline{a},\overline{b} \in P/\rho \ ; \ \overline{a} \leq \overline{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

هي علاقة ترتيب جزئي على P/ρ.

البرهان:

1-

- $\forall a \in P \underbrace{\Rightarrow}_{\text{العلاقة } \leq \text{ المعرفة على } P \text{ بالفرض انعكاسية}} a \leq a \ , \ a \leq a \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب تعريف العلاقة } \rho} a \rho a \Rightarrow$ العلاقة ρ انعكاسية
- $\forall a,b \in P \ ; \ a \rho b \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب تعريف العلاقة } \rho} a \leq b, \ b \leq a \Rightarrow b \leq a, a \leq b \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بحسب تعريف العلاقة } \rho} b \rho a$

$\Rightarrow$ العلاقة ρ تناظرية

$-\ \forall a,b,c \in P\ ;\quad a\rho b\ ,\ b\rho c \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بحسب تعريف}\\ \rho \text{ العلاقة}}} a \le b\ , b \le a\ ,\ b \le c\ , c \le b$

$\Rightarrow a \le b\ ,\ b \le c\ ,\ c \le b\ ,\ b \le a \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{العلاقة} \le \text{ المعرفة على } P\\ \text{بالفرض متعدية}}} a \le c\ , c \le a \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{بحسب تعريف}\\ \rho \text{ العلاقة}}} a\rho c$

العلاقة ρ متعدية $\Rightarrow$

مما سبق نستنتج أن العلاقة ρ هي علاقة تكافؤ على P.

2– لنثبت **أولاً** أن العلاقة $\le$ المعرفة على المجموعة P/ρ بالفرض هي علاقة معرفة جيداً.

لتكن $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ عناصر كيفية من P/ρ ولنفرض أن

$$\overline{a} = \overline{b}\ ,\ \overline{c} = \overline{d}$$

ولنبرهن على أنه إذا كان $\overline{a} \le \overline{c}$ فإن $\overline{b} \le \overline{d}$.

$a \in \overline{a} \underbrace{=}_{\text{من الفرض}} \overline{b} \Rightarrow a \in \overline{b} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{من تعريف صف}\\ \text{تكافؤ العنصر } b}} b\rho a \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\rho \text{ العلاقة}\\ \text{تناظرية انظر البرهان في}\\ -1}} a\rho b$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{من تعريف العلاقة } \rho} \underbrace{a \le b\ ,\ b \le a}_{(1)}$$

$c \in \overline{c} \underbrace{=}_{\text{من الفرض}} \overline{d} \Rightarrow c \in \overline{d} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{من تعريف صف}\\ \text{تكافؤ العنصر } d}} d\rho c \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\rho \text{ العلاقة}\\ \text{تناظرية انظر البرهان في}\\ -1}} c\rho d$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{من تعريف العلاقة } \rho} \underbrace{c \le d\ ,\ d \le c}_{(2)}$$

$\overline{a} \le \overline{c}$ من فرضيتنا $\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{من تعريف العلاقة} \le\\ \text{على } P/\rho}} \underbrace{a \le c}_{(3)}$

$$\left.\begin{matrix} b \le a \text{ من } (1) \\ a \le c \text{ من } (3) \end{matrix}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{\text{العلاقة} \le\\ \text{المعرفة على } P\\ \text{بالفرض متعدية}}} \underbrace{b \le c}_{(4)}$$

$$\left.\begin{matrix}(4)\ \text{من}\ b \le c \\ (2)\ \text{من}\ c \le d\end{matrix}\right\} \underset{\text{العلاقة} \le \text{المعرفة على } P \text{ بالفرض متعدية}}{\Rightarrow} b \le d \underset{\text{من تعريف العلاقة} \le \text{على } P/\rho}{\Rightarrow} \overline{b} \le \overline{d}$$

أخذنا $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ عناصر كيفية من P/ρ وفرضنا أن $\overline{c} = \overline{d}$, $\overline{a} = \overline{b}$ وأن $\overline{a} \le \overline{c}$ وتوصلنا إلى $\overline{b} \le \overline{d}$ مما يعني أن العلاقة $\le$ المعرفة على المجموعة P/ρ بالفرض هي علاقة معرفة جيداً أي مستقلة عن اختيار الممثل لصف التكافؤ.

ثانياً: لنثبت أن العلاقة $\le$ المعرفة بالفرض هي علاقة ترتيب جزئي على P/ρ.

العلاقة $\le$ المعرفة على P/ρ انعكاسية $\Rightarrow \overline{a} \le \overline{a} \underset{\text{من تعريف العلاقة} \le \text{على } P/\rho}{\Rightarrow} a \le a \underset{\text{العلاقة} \le \text{المعرفة على } P \text{ انعكاسية فرضاً}}{\Rightarrow} \forall \overline{a} \in P/\rho \Rightarrow a \in P$ −

$\forall \overline{a}, \overline{b} \in P/\rho\ ;\ \overline{a} \le \overline{b}\ ,\ \overline{b} \le \overline{a} \underset{\text{من تعريف العلاقة} \le \text{على } P/\rho}{\Rightarrow} a \le b\ , b \le a$ −

العلاقة $\le$ المعرفة على P/ρ تخالفية $\Rightarrow \overline{a} = \overline{b} \underset{\text{بحسب التمهيدية الأولى في المحاضرة السابقة}}{\Rightarrow} b \in \overline{a} \underset{\rho \text{ علاقة تكافؤ برهاناً انظر } -1 \text{ بالتالي بحسب تعريف صف التكافؤ}}{\Rightarrow} a\ \rho\ b \underset{\text{بحسب تعريف العلاقة } \rho}{\Rightarrow}$

$\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in P/\rho\ ;\ \overline{a} \le \overline{b},\ \overline{b} \le \overline{c} \underset{\text{من تعريف العلاقة} \le \text{على } P/\rho}{\Rightarrow} a \le b,\ b \le c \underset{\text{العلاقة} \le \text{بالفرض متعدية}}{\Rightarrow} a \le c$ −

العلاقة $\le$ المعرفة على P/ρ متعدية $\Rightarrow \overline{a} \le \overline{c} \underset{\text{من تعريف العلاقة} \le \text{على } P/\rho}{\Rightarrow}$

مما سبق نستنتج أن العلاقة $\le$ المعرفة بالفرض هي علاقة ترتيب جزئي على P/ρ.

وهو المطلوب

تعريف: لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً عندئذٍ

1– نقول عن العنصر $a \in P$ أنهُ عنصر أصغر في P إذا حقق الشرط

$$\forall x \in P \Rightarrow a \leq x$$

2– نقول عن العنصر $b \in P$ أنهُ عنصر أصغري في P إذا حقق الشرط

$$\forall y \in P \ ; \ y \leq b \Rightarrow y = b$$

3– نقول عن العنصر $a \in P$ أنهُ عنصر أكبر في P إذا حقق الشرط

$$\forall x \in P \Rightarrow x \leq a$$

4– نقول عن العنصر $b \in P$ أنهُ عنصر أعظمي في P إذا حقق الشرط

$$\forall y \in P \ ; \ b \leq y \Rightarrow b = y$$

أمثلة توضيحية:

1– لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية أي

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

إن الصفر هو عنصر أصغر في $\mathbb{N}$ لأنهُ آياً كانت $n \in \mathbb{N}$ فإن $0 \leq n$.

2– إن $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة لا تحوي عنصر أصغر – أكبر – أصغري – أعظمي.

3– لتكن $P = \{a,b,c,d\}$ ولنأخذ الأسرة

$$\sum = \{\{a\},\{a,b\},\{a,d\}\}$$

$(\sum \ , \subseteq)$ مجموعة مرتبة جزئياً وتم البرهان بشكل عام سابقاً.

المطلوب هل العنصر $\{a\}$ أصغر في $\sum$ ، وهل هو أصغري؟ علل إجابتك.

الإجابة: إن العنصر $\{a\}$ أصغر في $\sum$ لأن

$$\{a\} \subseteq \{a\}$$

$$\{a\} \subseteq \{a,b\}$$

$$\{a\} \subseteq \{a,d\}$$

لكنه ليس أصغرياً في $\sum$ لأن

$$\{a\} \subsetneq \{a,b\}$$

- لنأخذ الأسرة

$$\sum_1 = \{\{a\},\{a,b\},\{c,d\}\}$$

المطلوب:

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

1– هل العنصر $\{a\}$ أصغر في $\sum$ ، وهل هو أصغري؟ علل إجابتك.

2– هل العنصر $\{c,d\}$ أكبر في $\sum$ ، وهل هو أعظمي؟ علل إجابتك.

الإجابة:

1– إن العنصر $\{a\}$ ليس أصغر في $\sum$ لأن

$$\{a\} \not\subseteq \{c,d\}$$

وليس أصغرياً في $\sum$ لأن

$$\{a\} \subsetneq \{a,b\}$$

2– إن العنصر $\{c,d\}$ ليس أكبر في $\sum$ لأن

$$\{a,b\} \not\subseteq \{c,d\}$$

وهو عنصر أعظمي وأصغري في $\sum$.

تمرين(وظيفة): لتكن $(P,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. أثبت أن:

1– العنصر الأصغر (في حال وجوده) في P وحيد وكذلك الأمر بالنسبة للعنصر الأكبر.

2– أثبت أن كل عنصر أصغر هو أصغري و أثبت أن كل عنصر أكبر هو أعظمي.

الإثبات:

1– لنفرض أن a_0, a_1 عنصرين من P كُل منهما أصغر في P.

بما أن a_0 عنصر أصغر في P فحسب التعريف

$$\forall\, x \in P \;\Rightarrow a_0 \leq x$$

والأخير مُحقق من أجل جميع قيم x من P بما فيها $x = a_1$ أي

$$a_0 \leq a_1 \;\ldots(1)$$

بما أن a_1 عنصر أصغر في P فحسب التعريف

$$\forall\, y \in P \;\Rightarrow a_1 \leq y$$

والأخير مُحقق من أجل جميع قيم y من P بما فيها $y = a_0$ أي

$$a_1 \leq a_0 \;\ldots(2)$$

من (1) و (2) وكون العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب جزئي على P فهي إذاً تخالفية أي

$$a_0 = a_1$$

ومن هنا يتبين أن العنصر الأصغر في حال وجوده في P وحيد.

مكتبـــة بريمـــا فيـــرا – مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

- لإثبات أن العنصر الأكبر في حال وجوده في P وحيد اتبع نفس البرهان السابق مع تعريف العنصر الأكبر تجد المراد.

2– لنفرض أن a عنصر أصغر في P وهذا يعني أن

$$\forall x \in P \Rightarrow a \leq x \quad \dots *$$

ولنفرض أن b عنصر أصغري في P وهذا يعني أن

$$\forall y \in P \;;\; y \leq b \Rightarrow y = b \quad \dots **$$

$*$ مُحققة من أجل جميع قيم x من P بما فيها $x = b$ أي

$$a \leq b$$

وبالاستفادة من ** نجد أن $a = b$.

أي أن العنصر الأصغر في المجموعة P المرتبة جزئياً إن وجد فهو العنصر الأصغري الوحيد في P.

- لإثبات أن العنصر الأعظمي في حال وجوده في P وحيد اتبع نفس البرهان السابق مع تعريف العنصر الأعظمي تجد المراد.

انتهت المحاضرة الثانية