WWW.facebook.com/primavira33

جامعة دمشق
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السنة الدراسية الثانية

اقرأ وارتقِ

# المعادلات التفاضلية (1)

## المحاضرة الخامسة

تاريخ المحاضرة: 21/10/2015

مدرس المقرر: د. خليل يحيى



مكتبة بريما فيرا – مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

**مثال(1)**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{3x - y + 5}{x + y - 1}$$

**الحل**: إن المعادلة المفروضة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو $y$ أما المتحول فهو $x$ ولها الشكل الآتي:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right) \quad ; \quad \begin{matrix} a = 3\,, b = -1\,, c = 5 \\ a_1 = 1\ ,\ \ b_1 = 1\ , c_1 = -1 \end{matrix}$$

ولدينا المستقيمان:

$$D_1 : \ \ 3x - y + 5 = 0$$

$$D_2 : \ \ x + y - 1 \ = 0$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{3}{1} \neq \frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1} = \frac{-1}{1}$$

وبالتالي المستقيمان $D_1, D_2$ متقاطعان في نقطة $(\alpha, \beta)$ نحصل عليها من الحل المشترك لمعادلتي المستقيمين:

$$3x - y + 5 = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

بجمع المعادلة الأولى طرفاً لطرف مع المعادلة الثانية نحصل على:

$$4x + 4 = 0 \ \Rightarrow 4x = -4 \ \Rightarrow x = -1$$

نعوض في واحدة من المعادلتين (في الأولى مثلاً) لنحصل على

$$-3 - y + 5 = 0 \ \Rightarrow \ -y + 2 = 0 \ \Rightarrow y = 2$$

وبالتالي نقطة التقاطع هي $(\alpha, \beta) = (-1,2)$.

لنجري التحويلين

$$x = X - 1 \qquad \text{" تغيير في المتحول } x \text{ "}$$

$$y = Y + 2 \quad ; \ Y = Y(X) \qquad \text{" تغيير في التابع } y \text{"}$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX}.\frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dX}.(1) = \frac{dy}{dX} = \frac{dY}{dX} = Y'$$

نعوض كُل ما سبق في المعادلة المفروضة لنحصل على:


مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob$ : 0993586758 − $Tel$ : 011 2124436

$$Y' = \frac{3(X-1)-(Y+2)+5}{X-1+Y+2-1} \Rightarrow Y' = \frac{3X-Y}{X+Y} \underset{X\neq 0 \text{ نقسم البسط والمقام على}}{\Rightarrow} \underbrace{Y' = \frac{3-\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}}}_{*}$$

إن المعادلة * هي معادلة تفاضلية عادية التابع المجهول فيها هو $Y$ والمتحول هو $X$ وهي من المرتبة الأولى والدرجة الأولى وواضح أنها متجانسة.

لإيجاد الحل العام لها نجري تغييراً في التابع $Y$ من الشكل:

$$Z = \frac{Y}{X} \quad ; \quad Z = Z(X) \Rightarrow Y = X.Z \underset{\text{بالاشتقاق بالنسبة لـ } X}{\Rightarrow} Y' = Z + X.Z'$$

نعوض عبارة $Y$ وعبارة $Y'$ السابقتين في * فنحصل على:

$$Z + X.Z' = \frac{3-Z}{1+Z} \Rightarrow X.Z' = \frac{3-Z}{1+Z} - Z \Rightarrow X.Z' = \frac{3-Z-Z-Z^2}{1+Z}$$

$$\Rightarrow X.Z' = -\frac{Z^2+2Z-3}{1+Z} \Rightarrow \underbrace{X.\frac{dZ}{dX} = -\frac{(Z+3)(Z-1)}{1+Z}}_{**}$$

والمعادلة ** هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو $Z$ أما المتحول فهو $X$ وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$\underset{\text{بفصل (عزل) المتحولات}}{\Rightarrow} \frac{Z+1}{(Z+3)(Z-1)}dZ = -\frac{dX}{X} \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} \int \frac{Z+1}{(Z+3)(Z-1)}dZ = -\int \frac{dX}{X} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dZ}{Z+3} + \frac{1}{2}\int \frac{dZ}{Z-1} = -\int \frac{dX}{X} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|Z+3| + \frac{1}{2}\ln|Z-1| = -\ln|X| + \frac{1}{2}\ln|C|$$

$$\Rightarrow \ln|Z+3| + \ln|Z-1| = -2\ln|X| + \ln|C| \Rightarrow \ln|(Z+3)(Z-1)| = \ln\left|\frac{C}{X^2}\right|$$

$$\Rightarrow (Z+3)(Z-1) = \frac{C}{X^2} \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية ** ، وبالعودة للتابع القديم أي بتعويض $Z = \frac{Y}{X}$ فيما سبق نحصل على:

$$\left(\frac{Y}{X}+3\right)\left(\frac{Y}{X}-1\right) = \frac{C}{X^2} \Rightarrow \frac{(Y+3X)(Y-X)}{X^2} = \frac{C}{X^2} \underset{X^2\neq 0 \text{ نضرب الطرفين بـ}}{\Rightarrow}$$


مكتبة بريما فيرا — مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 − Tel : 011 2124436

$$(Y+3X)(Y-X)=C \;\; ; \;\; C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية $*$ ، وبالعودة للتابع القديم والمتحول القديم أي بتعويض

$Y=y-2$ و $X=x+1$ فيما سبق نحصل على:

$$(y-2+3x+3)(y-2-x-1)=C \;\Rightarrow$$

$$(y+3x+1)(y-x-3)=C \;\; ; \;\; C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

**مثال(2)**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x-y+1)dx+(x-y+2)dy=0$$

**الحل**: إن المعادلة المفروضة تكتب بالشكل الآتي

$$(x-y+2)dy=-(x-y+1)dx \Rightarrow y'=\frac{-x+y-1}{x-y+2}$$

إن المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى ، التابع المجهول فيها هو $y$

أما المتحول فهو $x$ ولها الشكل الآتي:

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \;\; ; \;\; a=-1\,,b=1\,,c=-1 \\ a_1=1\,,\; b_1=-1\;,c_1=2$$

ولدينا المستقيمان:

$$D_1: \; -x+y-1=0$$

$$D_2: \; x-y+2=0$$

من الملاحظ أن:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{-1}{1}=-1 \quad and \quad \frac{b}{b_1}=\frac{1}{-1}=-1 \quad and \quad \frac{c}{c_1}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=-1=\lambda\neq\frac{c}{c_1}$$

مما سبق نستنتج أن المستقيمين $D_1, D_2$ متوازيين ، والمعادلة المفروضة تكتب بالشكل

$$y'=\frac{-(x-y)-1}{x-y+2}$$

نجري تغييراً في التابع $y$ من الشكل:


مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$

$$z = x - y \quad ; \quad z = z(x)$$

نفاضل طرفي المساواة الأخيرة بالنسبة للمتحول $x$ فنحصل على:

$$dz = dx - dy \underset{\text{نقسم على } dx}{\Rightarrow} \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \underset{\text{ومن التحويل}}{\overset{\text{بالاستفادة من المعادلة التفاضلية}}{\Rightarrow}}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{-z-1}{z+2} \Rightarrow z' = \frac{z+2+z+1}{z+2} \Rightarrow \underbrace{\frac{dz}{dx} = \frac{2z+3}{z+2}}_{*}$$

والمعادلة *هي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى والتابع المجهول فيها هو $z$ أما المتحول فهو $x$ وهي قابلة لفصل المتحولات.

$$dx = \frac{z+2}{2z+3}dz \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} \int dx = \int \frac{z+2}{2z+3}dz \Rightarrow x + C = \frac{1}{2}\int \frac{2z+4}{2z+3}dz$$

$$\Rightarrow x + C = \frac{1}{2}\int \frac{2z+3+1}{2z+3}dz \Rightarrow x + C = \frac{1}{2}\int \frac{2z+3}{2z+3}dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2z+3}dz$$

$$\Rightarrow x + C = \frac{1}{2}\int dz + \frac{1}{4}\int \frac{2}{2z+3}dz \Rightarrow x + C = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\ln|2z+3|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\ln|2z+3| - x = C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية * ، وبالعودة للتابع القديم $y$ أي بتعويض $z = x - y$ فيما سبق نحصل على:

$$\frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{4}\ln|2x-2y+3| - x = C \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

---

**مُلاحظة**: إن المثالين السابقين هُما المثالين (3 و 4) من أمثلة الوظيفة الموجودة في نهاية المحاضرة الثالثة.

بقي لدينا من الوظيفة المثال رقم (5) من دون حل فحاول مجدداً في حله

**الفقرة الخامسة**: المعادلات التفاضلية الخطية وطريقة إيجاد الحل العام لها.

**تعريف**: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية العادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى الآتية

$$y' = f(x,y) \quad ; \quad y = y(x)$$

عندئذٍ نقول عن المعادلة السابقة أنها معادلة تفاضلية خطية إذا كانت خطية بالنسبة لكُل من التابع $y$ والمتحول $x$ أي إذا كانت من الشكل الآتي:

$$y' + p(x).y = q(x) \quad \dots(1)$$

بحيث $p, q$ دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال ما $[a,b]$ من $\mathbb{R}$.

- إذا كانت $q(x) = 0$ لكُل $x \in [a,b]$ فإن المعادلة (1) تأخذ الشكل

$$y' + p(x).y = 0 \quad \dots(2)$$

وتدعى المعادلة (2) بالمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة (أو بالمعادلة التفاضلية الخطية بدون طرف ثاني).

- إذا كانت $q(x) \neq 0$ فإن المعادلة (1) تُسمى بمعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة.

**خطوات إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية(1):**

**الخطوة الأولى**: نوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة أي للمعادلة

$$y' + p(x).y = 0$$

ونحصل على الحل العام لها كما يلي:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x).y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Rightarrow \ln|y| - \ln|C| = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx$$

$$\Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow \underbrace{y = C.e^{-\int p(x)dx}}_{(3)} \quad ; \quad C \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة (1) من دون طرف ثاني.

**الخطوة الثانية**: نعتبر الثابت $C$ في (3) تابع في $x$ أي $C = C(x)$ عندئذٍ يصبح الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة:

$$y = C(x).e^{-\int p(x)dx} \quad \dots(4)$$

ثم نقوم بتعيين $C(x)$ بحيث يصبح (4) حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (1) ومن أجل ذلك نشتق طرفي المساواة (4) بالنسبة للمتحول $x$:

$$y' = C'(x).e^{-\int p(x)dx} - C(x).p(x)e^{-\int p(x)dx}$$


مكتبة بريما فيرا — مقابل كلية الفنون الجميلة
Mob : 0993586758 – Tel : 011 2124436

نعوض عبارة $y$ وعبارة $y'$ في المعادلة التفاضلية مع طرف ثاني أي في (1) لنحصل من ذلك على:

$$C'(x).e^{-\int p(x)dx} - C(x).p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x).C(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{باجراء الاختصارات المناسبة}}$$

$$C'(x).e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} \Rightarrow C'(x) = q(x).e^{\int p(x)dx} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}}$$

$$C(x) = \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx + C_1 \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

نعوض ما سبق في (4) فنحصل على:

$$y = e^{-\int p(x)dx}.\left(\int q(x).e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right) \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

والأخيرة هي التي تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) المدروسة.

**أمثلة على الفقرة الخامسة**

**مثال(1)**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

**الحل**: نقسم طرفي المعادلة المفروضة على $(1+x^2) \neq 0$ فنحصل على

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$$

والأخيرة هي معادلة من الشكل:

$$y' + p(x).y = q(x) \quad ; \quad p(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \; , \; q(x) = 1+x^2$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة.لإيجاد الحل العام لها نتبع الآتي:

**أولاً**: نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الناتجة عنها بدون الطرف الثاني أي للمعادلة

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}dx \underbrace{\Rightarrow}_{\text{بالمكاملة}} \int\frac{dy}{y} = \int\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln|1+x^2| + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = \ln|1+x^2| \Rightarrow \frac{y}{C} = 1+x^2 \Rightarrow y = C(1+x^2)$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (بدون طرف ثاني) وبحيث $C$ اختياري.

**ثانياً**: نعتبر $C = C(x)$ فنحصل على

$$y = C(x).(1+x^2) \quad ...*$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$y' = C'(x).(1+x^2) + 2x.C(x)$$

نعوض عبارة $y'$ وعبارة $y$ في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة لنحصل على

$$C'(x).(1+x^2) + 2x.C(x) - \frac{2x}{1+x^2}C(x).(1+x^2) = 1+x^2 \Rightarrow$$

$$C'(x).(1+x^2) + 2x.C(x) - 2xC(x) = 1+x^2 \Rightarrow C'(x).(1+x^2) = 1+x^2$$

$$\Rightarrow C'(x) = 1 \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} C(x) = x + C_1 \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

نعوض في * فنجد أن:

$$y = (x + C_1).(1+x^2) \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت من اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

**مثال(2)**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$y' - \frac{1}{x}y = x$$

**الحل**: إن المعادلة المفروضة هي معادلة من الشكل:

$$y' + p(x).y = q(x) \quad ; \quad p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة (مع طرف ثاني).لإيجاد الحل العام لها نتبع الآتي:

**أولاً**: نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الناتجة عنها بدون الطرف الثاني أي للمعادلة

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln|y| = \ln|C.x|$$

$$\Rightarrow y = C.x$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (بدون طرف ثاني) وبحيث $C$ اختياري.

**ثانياً**: نعتبر $C = C(x)$ فنحصل على

$$y = C(x).x \quad ...*$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$y' = C'(x).x + C(x)$$

نعوض عبارة $y'$ وعبارة $y$ في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة فنحصل على

$$C'(x).x + C(x) - \frac{1}{x}.C(x).x = x \Rightarrow C'(x).x + C(x) - C(x) = x \Rightarrow C'(x).x = x$$


مكتبـــة بريمـــا فيـــرا — مقابـل كليـة الفنـــون الجميلـــة
$Mob: 0993586758 - Tel: 011\ 2124436$

$$\Rightarrow C'(x) = 1 \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} C(x) = x + C_1 \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

نعوض في * فنجد أن:

$$y = x.(x + C_1) \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت من اختياري}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

**مثال(3)**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$$

**الحل**: إن المعادلة المفروضة هي معادلة من الشكل:

$$y' + p(x).y = q(x) \quad ; \quad p(x) = \frac{3}{x} \quad , \quad q(x) = \frac{2}{x^3}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة (مع طرف ثاني). لإيجاد الحل العام لها نتبع الآتي:

**أولاً**: نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الناتجة عنها بدون الطرف الثاني أي للمعادلة

$$y' + \frac{3}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -3\frac{dx}{x} \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} \ln|y| = -3\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{1}{x^3}\right| + \ln|C| \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x^3}\right| \Rightarrow y = \frac{C}{x^3}$$

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (بدون طرف ثاني) وبحيث $C$ اختياري.

**ثانياً**: نعتبر $C = C(x)$ فنحصل على

$$y = \frac{C(x)}{x^3} \quad \dots *$$

بالاشتقاق نحصل على:

$$y' = \frac{C'(x).x^3 - 3x^2.C(x)}{x^6} = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3.C(x)}{x^4}$$

نعوض عبارة $y'$ وعبارة $y$ في المعادلة التفاضلية غير المتجانسة فنحصل على

$$\frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3.C(x)}{x^4} + \frac{3}{x}.\frac{C(x)}{x^3} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3.C(x)}{x^4} + \frac{3.C(x)}{x^4} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow$$

$$\frac{C'(x)}{x^3} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow C'(x) = 2 \underset{\text{بالمكاملة}}{\Rightarrow} C(x) = 2x + C_1 \quad ; \quad C_1 \text{ ثابت اختياري}$$

نعوض في * فنجد أن:

$y = \frac{2x + C_1}{x^3}$ ; $C_1$ ثابت من اختياري

والأخيرة هي التي تُمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

## انتهت المحاضرة الخامسة